LINEARNI OPERATOR

Neka su X i Y vektorski prostori. Preslikavanje $A : X \to Y$ naziva se **linearni operator** ako vrijedi:

$$(\forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in X)(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \;\; A(\alpha_1 \vec{x_1} + \alpha_2 \vec{x_2}) = \alpha_1 A(\vec{x_1}) + \alpha_2 A(\vec{x_2}).$$

Ovaj uvjet naziva se uvjet **linearnosti**. On je ekvivalentan uvjetima **aditivnosti**:

$$(\forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in X) \;\; A(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = A(\vec{x_1}) + A(\vec{x_2})$$

i **homogenosti**

$$(\forall \vec{x} \in X)(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \;\; A(\alpha \vec{x}) = \alpha A(\vec{x}).$$

Neka je $\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}$ baza u prostoru X,a $\vec{f_1}, \ldots \vec{f_m}$ baza u prostoru Y. Iz prikaza

$$\begin{aligned}
A(\vec{e_1}) \quad &= a_{11}\vec{f_1} + a_{21}\vec{f_2} + \cdots + a_{m1}\vec{f_m} \\
A(\vec{e_2}) \quad &= a_{12}\vec{f_1} + a_{22}\vec{f_2} + \cdots + a_{m2}\vec{f_m} \\
\vdots \quad & \\
A(\vec{e_n}) \quad &= a_{1n}\vec{f_1} + a_{2n}\vec{f_2} + \cdots + a_{mn}\vec{f_m}
\end{aligned}$$

dobiva se matrica **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

koja predstavlja prikaz operatora u paru zadanih baza. Vidimo da j-ti stupac matrice **A** čine komponente vektora $A(\vec{e_j})$ po bazi $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_m}$.

PROMJENA BAZE

Neka je **A** matrica linearnog operatora A u bazi $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$, te **A'** matrica istog operatora u drugoj bazi $\vec{e'_1}, \ldots \vec{e'_n}$. Prijelaz iz stare u novu bazu opisan je matricom prijelaza:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots t_{nn} \end{bmatrix}$$

čiji su stupci komponente vektora nove baze prikazanih pomoću vektora stare. Veza između matrica **A** i **A'** dana je formulom

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

Neka su $\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}$ (stara) i $\vec{e'_1}, \ldots \vec{e'_n}$ (nova) baza za vektorski prostor X. Vektor $\vec{x}$ ima u te dvije baze prikaze:

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n} = x'_1\vec{e'_1} + \cdots + x'_n\vec{e'_n}.$$

Matrica prijelaza **T** iz stare u novu bazu

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots t_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \vec{e'_1} &= t_{11}\vec{e_1} + \cdots + t_{n1}\vec{e_n} \\ \vec{e'_2} &= t_{12}\vec{e_1} + \cdots + t_{n2}\vec{e_n} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \vec{e'_n} &= t_{1n}\vec{e_1} + \cdots + t_{nn}\vec{e_n}. \end{aligned}$$

Sada se komponente vektora $\vec{x}$ transformiraju na način $\vec{x} = \mathbf{T}\vec{x'}$ ili drugačije zapisano $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j, \forall i$.
To znači da je $\vec{x'} = \mathbf{T}^{-1}\vec{x}$. Ove komponente nalazimo obično kao rješenja linearnog sustava:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots t_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$