

**Ciljevi i način rada u metodičkoj radionici  
(I sadržaji iz teorije brojeva i algebre pogodni za rad  
na dodatnoj nastavi matematike)**

Ana Jurasić, 2013.

# Zašto metodička radionica za nastavnike?

---

- ▶ Društvo pred školu postavlja sve veće zahtjeve u pogledu obrazovanja mladih ljudi.
  - ▶ **Raste potreba za stručnjacima s dobrim matematičkim znanjem i umijećem primjene tog znanja.**
  - ▶ Razvojem društva neka znanja brzo postaju neupotrebljiva i beskorisna, **javlja se potreba za novim znanjima.**
- ▶ Zbog toga se mijenjaju i obogaćuju nastavni programi, usavršavaju se nastavne metode, uvode se nova nastavna sredstva i tehnologije.
- ▶ To znači da se **nastavnik matematike mora neprekidno usavršavati.**
- ▶ **Za povećanje uspješnosti rješavanja problema iz nekog područja matematike preporuča se:**
  - ▶ sudjelovanje na metodičkim radionicama za nastavnike,
  - ▶ izbor i grupiranje primjerenih zadataka,
  - ▶ cjelovita obrada područja,
  - ▶ provjera znanja o odabranom području koje su učenici stekli samostalnim radom,
  - ▶ usvajanje metoda rješavanja,
  - ▶ izbor prikladne literature,
- ▶ ▶ izvođenje matematičkih radionica za učenike.

- 
- ▶ Suvremena nastava matematike postavlja, dakle, dva bitna problema:
    - ▶ **Problem razvoja stvaralačkog mišljenja i kreativnih sposobnosti učenika,**
      - ▶ **Ciljevi suvremene matematike** u tom smislu su sljedeći:
        - učenje vrednovanja matematike,
        - razvijanje i njegovanje matematičkih sposobnosti,
        - razvijanje sposobnosti rješavanja problema,
        - učenje matematičkog rasuđivanja,
        - učenje matematičke komunikacije.
    - ▶ **Problem primjerenog osposobljavanja nastavnika matematike.**
      - ▶ Tradicionalni oblik rada su seminari za nastavnike matematike.
        - No, oni imaju niz negativnosti – teme su uglavnom nepovezane i ovise o izboru predavača, slušatelji su dosta pasivni pri obradi tema...
      - ▶ **Posljednjih godina uvode se metodičke i matematičke radionice.**
  - ▶ Najbolji oblik nastave za učenike je kombinacija grupnog i individualnog rada.
    - ▶ Taj je oblik rada u našoj školskoj praksi prilično zapostavljen.
- 





# Što je metodička radionica?

---

- ▶ **Metodička radionica** je oblik aktivnog sudjelovanja nastavnika matematike u vlastitom usavršavanju, s većim naglaskom na metodičkim postavkama i zakonitostima putem rada u manjim grupama nastavnika matematike.
- ▶ Ovakvim oblikom usavršavanja ostvaruju se sljedeći ciljevi:
  - ▶ iznošenje vlastitog iskustva,
  - ▶ slušanje drugih nastavnika i upoznavanje njihovih iskustava,
  - ▶ razgovor o idejama i metodičkim pitanjima,
  - ▶ razmjena ideja,
  - ▶ zajedničko osmišljavanje problema i pitanja,
  - ▶ osmišljavanje metodičkog pristupa rješavanju problema,
  - ▶ rasprava o rezultatima samostalnog i zajedničkog rada,
  - ▶ provjeravanje osobnog mišljenja,
  - ▶ razvijanje sposobnosti prosuđivanja i zaključivanja,
  - ▶ razvijanje sposobnosti matematičkog komuniciranja...



- 
- ▶ Ciljevi rada nastavnika u metodičkoj radionici prilagođeni su ostvarenju spomenutih ciljeva suvremene nastave matematike.
  - ▶ Teme pogodne za primjenu metodičkih radionica su gotovo bez iznimke sva područja nastavničke djelatnosti, ali neka su područja izrazito pogodna.
  - ▶ **Primjena metodičkih radionica može znatno unaprijediti rad s učenicima u nastavnom procesu, posebno rad s naprednijim učenicima.**
  - ▶ **Radom u metodičkoj radionici nastavnik dobiva primjerenu teorijsku osnovu i metodičku razradu neke teme, s nizom prikladno odabranih primjera i zadataka, a zajednički stavovi nastavnika u pojedinim grupama daju svakom nastavniku matematike veću sigurnost pri izvođenju vlastite nastave.**
- 
- 

- 
- ▶ Dugogodišnje praćenje matematičkih natjecanja pokazuje da se ni naši najbolji učenici često ne snalaze dobro u rješavanju nestandardnih i složenijih zadataka i da postižu slabe rezultate.
    - ▶ Nedostaju im neka znanja, ne poznaju neke jednostavne metode rješavanja matematičkih problema.
  - ▶ **Kako je za uspješno rješavanje problema iz nekog područja matematike potrebna prije svega primjerena teorijska osnova i njezina dobra metodička razrada, rješenje učenog problema treba potražiti u sudjelovanju u posebnim metodičkim radionicama (i organizaciji takvih radionica).**
    - ▶ U takvim radionicama nastavnici matematike mogu se upoznati s načinom primjerenog pripremanja učenika za natjecanja.
- 
- 

# Teorija brojeva

---

- ▶ Izdvojiti ćemo **diofantske jednadžbe** kao dodatni matematički sadržaj koji napredniji učenici osnovnih i srednjih škola moraju poznavati kako bi se što bolje pripremili za sve razine natjecanja.
  - ▶ Diofantske se jednadžbe ne nalaze u nastavnim programima kao posebna tema.
  - ▶ Dakle, znanje učenika o njima ovisi o nastavnicima matematike kao i o samostalnom radu samih učenika.
- ▶ Zadaci s diofantskim jednadžbama i problemima koji se svode na rješavanje diofantskih jednadžbi često se pojavljuju na matematičkim natjecanjima.
  - ▶ Velik broj naših najboljih učenika ima poteškoće pri rješavanju problema s diofantskim jednadžbama i probleme riješe tek djelimice.
  - ▶ Vrlo je važno da tijekom pripreme za natjecanja učenici obogate svoje znanje novim činjenicama, a posebno odgovarajućim metodama rješavanja.
  - ▶ Nastavnici se kroz odgovarajuću metodičku radionicu ili na neki drugi način moraju upoznati (ako ranije nisu) s metodama i metodičkim pristupom rješavanju diofantskih jednadžbi.





# Metodika rješavanja diofantskih jednadžbi

---

- ▶ Diofantske jednadžbe naziv su dobile po Diofantu iz Aleksandrije.
    - ▶ Kada se s učenicima obrađuje ova tema npr. u okviru odgovarajuće matematičke radionice – zgodno je i motivirajuće na početku uklopiti nekoliko uvodnih riječi o Diofantu, vezano za kojeg postoje različiti zanimljivi podaci.
  - ▶ **Diofantske jednadžbe** su algebarske (polinomne) jednadžbe s dvije ili više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima za koje se traže cjelobrojna (ili racionalna) rješenja.
  - ▶ Promatraju se i sustavi takvih jednadžbi, pri čemu se uzima da je broj nepoznanica veći od broja jednadžbi.
  - ▶ Diofantske jednadžbe mogu biti **linearne** i **nelinearne**.
  - ▶ Primjeri:
    - ▶  $3x+7y-8 = 0$  i  $x+y = z$  su linearne d. j. s dvije, odnosno tri nepoznanice, redom.
    - ▶  $xy-5x+y = 12$  i  $x^2+y^2 = z^2$  su d.j. drugog stupnja s dvije, odnosno tri nepoznanice, redom,
    - ▶  $x^3-y^3-1 = 0$  i  $xyz = 2007$  su d.j. trećeg stupnja... .
- 



- 
- ▶ Često su diofantske jednačbe po obliku jednostavne, ali je njihovo rješavanje složeno, i obratno.
  - ▶ **Za uspješno rješavanje diofantskih jednačbi potrebno je da učenici znaju niz jednostavnih činjenica o brojevima:**
    - ▶ Paran prirodan broj je oblika  $2k$ , a neparan oblika  $2k-1$ .
    - ▶ Prirodan je broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3.
    - ▶ Prirodan je broj djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 9.
    - ▶ Ako je svaki pribrojnik u zbroju djeljiv nekim brojem, onda je i zbroj djeljiv tim brojem.
    - ▶ Umnožak tri uzastopna prirodna broja djeljiv je sa 6.
    - ▶ Umnožak dva uzastopna parna broja djeljiv je s 8.
    - ▶ Kvadrati prirodnih brojeva ne mogu završavati s 2,3,7 i 8.
      - ▶ Naime, razvrstamo li sve prirodne brojeve u podskupove prema posljednjim znamenkama brojeva, dobivamo deset podskupova.
      - ▶ Dalje ispitujemo i uvjeravamo se da ako broj završava s 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 tada njegov kvadrat završava s 0,1,4,9,6,5,6,9,4,1, redom.
- 
- 

- 
- ▶ Kvadrat svakog parnog prirodnog broja oblika je  $4m$ .
  - ▶ Kvadrat svakog neparnog prirodnog broja oblika je  $8m+1$ .
    - ▶ Naime,  $(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$ .
    - ▶ Za  $k = 1$  imamo  $8 \cdot 0 + 1$ , dok je za  $k > 1$  umnožak  $k(k-1)$  paran broj  $2m$  pa imamo  $4 \cdot 2m + 1$ .
  - ▶ Svaki prost broj veći od 3 oblika je  $6m-1$  ili  $6m+1$ .
    - ▶ Naime svaki prirodan broj pri dijeljenju s 6 daje neki od ostataka 0, 1, 2, 3, 4 ili 5.
    - ▶ Brojevi oblika  $6k$ ,  $6k+2$ ,  $6k+3$ ,  $6k+4$  su složeni pa za proste brojeve veće od 3 ostaju jedino mogućnosti  $6k+1$  i  $6k+5$ .
    - ▶ Još ostaje primijetiti da je  $6k+5 = 6k+6-1 = 6(k+1)-1$ .
  - ▶ Kvadrat svakog prostog broja većeg od 3 je oblika  $12m+1$ .
    - ▶ Naime,  $(6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12k(3k \pm 1) + 1$ .
  - ▶ Ako je  $n^2$  paran broj, onda je i  $n$  paran broj.
    - ▶ Naime, da je  $n = 2m+1$ , imali bi  $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$ , što je neparan broj.
  - ▶ Ako je  $n^2$  neparan broj, onda je i  $n$  neparan.
    - ▶ Da je  $n = 2m$ , imali bi  $n^2 = 4m^2$ , što je paran broj.
  - ▶ Zbroj i razlika dvaju cijelih brojeva iste je parnosti.
- 

# Linearne diofantske jednačbe

---

- ▶ **Opći oblik linearne diofantske jednačbe s dvije nepoznanice je**

$$ax+by = c,$$

gdje su  $a, b$  i  $c$  cijeli brojevi te je barem jedan od brojeva  $a, b$  različit od 0.

- ▶ Ako je slobodni član  $c = 0$ , kažemo da je pripadna jednačba **homogena**. Takva jednačba ima uvijek beskonačno mnogo rješenja u skupu cijelih brojeva.
- ▶ Opće rješenje homogene linearne diofantske jednačbe dano je s  $x = -bk$ ,  $y = ak$ , gdje je  $k$  cijeli broj.
  
- ▶ **Neke linearne diofantske jednačbe imaju cjelobrojna rješenja, a neke nemaju.**
- ▶ **Linearna diofantska jednačba navedenog oblika, gdje je  $c \neq 0$ , ima cjelobrojno rješenje ako i samo ako  $(a, b) | c$ .**
- ▶ Ako je  $(x_1, y_1)$  jedno **posebno rješenje** linearne diofantske jednačbe  $ax+by = c$ , tada je **opće rješenje** te jednačbe zbroj njezinog posebnog rješenja i općeg rješenja pridružene homogene jednačbe. Dakle,

---

$$x = -bk+x_1, y = ak+y_1, k \in \mathbb{Z}.$$

- 
- ▶ U mnogim slučajevima nalaženje jednog posebnog rješenja nije teško, ali ako takvo rješenje “ne vidimo”, onda ga određujemo primjenom Euklidovog algoritma (vidjeti npr. <http://web.math.hr/~duje/utb/utblink.pdf> - str. 5.).




# Metode rješavanja diofantskih jednačbi

---

- ▶ Mnogi se matematički problemi svode na rješavanje diofantskih jednačbi.
- ▶ Postoje razne metode njihova rješavanja – opisat ćemo neke najvažnije.
- ▶ Sve metode koje ćemo navesti posebni su oblici jedne opće metode, koja se naziva **metoda razlikovanja slučaja**.
  - ▶ Ta metoda ima važnu ulogu u matematici – njezinom se primjenom rješavanje nekog težeg problema svodi na rješavanje nekoliko jednostavnijih problema.
- ▶ **Metoda umnoška**
  - ▶ Primjenjuje se kod diofantskih jednačbi najmanje drugog stupnja.
  - ▶ Zadana diofantska jednačba svede se najprije nizom transformacija na oblik u kojem je lijeva strana, gdje se nalaze nepoznanice, umnožak, a desna strana broj.
  - ▶ Zatim se razmatraju svi mogući slučajevi za dobivene faktore.
    - ▶ Ako se na desnoj strani pojavi složen broj, broj slučajeva koje treba razmatrati može biti velik.
    - ▶ Nastavnik može učenike uputiti da ne razmatraju slučajeve koji ne doprinose skupu rješenja polazne jednačbe.
      - Npr. nekada promatramo samo prirodne brojeve pa naknadno kombiniramo različite mogućnosti predznaka.



- 
- ▶ **Pr. 1.** *Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbu  $x^2 = y^2 + 2001$ .*
    - ▶ Kako se u jednadžbi pojavljuju samo kvadrati nepoznanica, dovoljno je jednadžbu riješiti u skupu prirodnih brojeva i onda kombinirati predznake u svakom dobivenom rješenju.
  
  - ▶ **Pr. 2.** *Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbu  $x^2 - xy + 2x - 2y + 3 = 0$ .*
    - ▶ Ovo je složenija diofantska jednadžba drugog stupnja.
    - ▶ Primjećujemo da je moguće postići umnožak u jednadžbi pa je metoda umnoška ovdje primjerena.
  
  - ▶ **Metoda kvocijenta**
    - ▶ Jednadžba se transformira tako da se jedna nepoznanica predoči kao racionalna funkcija druge nepoznanice, a zatim prikaže kao zbroj cijele i racionalne funkcije druge nepoznanice.
    - ▶ Analizom dobivene racionalne funkcije, izdvoje se svi mogući slučajevi.
- 
- 

- 
- ▶ **Pr. 3.** *Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu  $1/x+1/y+1/xy = 1$ .*

- ▶ Zadatak sa županijskog natjecanja za 8. razred.
- ▶ Ovaj se zadatak može riješiti i metodom umnoška.

- ▶ **Metoda parnosti**

- ▶ Koristi se podjela skupa cijelih brojeva na parne i neparne.
- ▶ U zadanoj diofantskoj jednadžbi odredi se parnost jedne od nepoznanica i na temelju toga zaključuje se ima li jednadžba cjelobrojno rješenje ili nema.

- ▶ **Pr. 4.** *Dokaži da linearna jednadžba  $(n^2+n+2)x+2y = 1$  nema cjelobrojno rješenje  $(x,y)$  ni za jedan cijeli broj  $n$ .*

- ▶ Zadatak s općinskog natjecanja za 1. razred srednje škole.
- 
- 

---

▶ **Metoda posljednje znamenke**

- ▶ U zadanoj diofantskoj jednadžbi odrede se posljednje znamenke brojeva na lijevoj i desnoj strani.
- ▶ Na temelju toga izvede se zaključak ima li jednadžba cjelobrojno rješenje ili nema.

▶ **Pr. 5.** *Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbu  $5x+2y^2 = 2001$ .*

▶ **Metoda nejednakosti**

- ▶ Bit ove metode sastoji se u sužavanju područja mogućih vrijednosti nepoznanica u jednadžbi i razmatranju slučajeva u tako dobivenom suženom skupu.

▶ **Pr. 6.** *Nađi sve trojke cijelih brojeva  $(a,b,c)$  koje zadovoljavaju jednakost  $3(a-3)^2+6b^2+2c^2+3b^2c^2 = 33$ .*

- ▶ *Zadatak s natjecanja za srednje škole.*
- 
- ▶

# Još nekoliko zadataka, iz područja teorije brojeva, s natjecanja iz matematike za srednje škole

---

- ▶ **Pr. 7.** *Dokaži da jednačba  $x!+y! = 10z+9$  nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.*
- ▶ **Pr. 8.** *Vrijedi  $126 = 6 \cdot 21$ . Nađi sve troznamenaste prirodne brojeve koji su jednaki umnošku jedne svoje znamenke s dvoznamenkastim brojem koji čine preostale dvije znamenke.*
- ▶ **Pr.9.** *Dokaži da je za svaki prirodan broj  $n$  i broj  $((3-\sqrt{5})/2)^n + ((3+\sqrt{5})/2)^n$  prirodan.*
- ▶ **Pr.10.** *Nađi realna rješenja jednačbe  $[(x-1)^2] = [x]$ . ( $[x]$  je najveći cijeli broj manji ili jednak od  $x$ .)*
  - ▶ *Zadatak je zadan na državnom natjecanju iz matematike 1991. godine, za drugi razred srednje škole.*



# Nekoliko zadataka, iz područja algebre, s natjecanja iz matematike za srednje škole

---

- ▶ **Pr. 11.** *Izračunaj  $ab+cd$  ako je  $a^2+b^2 = 1$ ,  $c^2+d^2 = 1$ ,  $ac+bd = 0$ .*
    - ▶ *Državno natjecanje 1982., prvi razred.*
  
  - ▶ **Pr.12.** *Dokaži da je  $x^{6n+1} + 1/x^{6n+1} = 1$  za svaki prirodan broj  $n$ , ako je  $x+1/x = 1$ .*
    - ▶ *Državno natjecanje 1991., prvi razred.*
  
  - ▶ **Pr.13.** *Odredi realne brojeve  $a$  i  $b$  tako da polinom  $x^4-2x^3+ax^2+2x+b$  bude djeljiv s polinomom  $x^2-2x-3$ .*
    - ▶ *Državno natjecanje 1989., prvi razred.*
  
  - ▶ **Pr. 14.** *Za koje cjelobrojne vrijednosti parametra  $m$  polinomi  $x^4+mx^2+1$  i  $x^3+mx+1$  imaju zajednički korijen?*
    - ▶ *Državno natjecanje 1987., drugi razred.*
  
  - ▶ **Pr. 15.** *Odredi sve polinome  $P(x)$  za koje vrijedi  $(x+1)P(x) = (x-2)P(x+1)$ .*
    - ▶ *Državno natjecanje 1988., drugi razred.*
- 



# Literatura

---

- ▶ Elezović, N: *Diofantske jednadžbe*, Element, Zagreb, 2007.
- ▶ Dujella, A., Bombardelli, M., Slijepčević, S.: *Matematička natjecanja učenika srednjih škola*, Element, Zagreb, 1996.

