

**Radoznanost, mašta, igra i kreativnost u dodatnoj nastavi
matematike
(I neke teme pogodne za poticanje razvoja matematičke
darovitosti učenika osnovnih škola)**

Ana Jurasić, 2013.

Što je kreativnost?

- ▶ **Kreativnost** je mentalni proces kojim osoba stvara nove ideje i produkte na način koji je za nju nov.
 - ▶ Pitanje je što je mjerilo i možemo li suditi o tome što je *kreativni uradak*.
 - ▶ Osobine *kreativnih pojedinaca*:
 - ▶ sklonost kritičnom odnosu,
 - ▶ inicijativnost, aktivitet,
 - ▶ radoznalost,
 - ▶ sposobnost duboke koncentracije,
 - ▶ samopouzdanost,
 - ▶ ...
- ▶ **Kreativno mišljenje** je dio organizacije i strukture produktivnog mišljenja i riječ je o vještini – dakle može se uvježbavati (Treffinger).



Kako poticati kreativnost kod učenika?

- ▶ Omogućiti učenicima kontakte s izvorima informacija i kreativnim pojedincima,
- ▶ omogućiti individualizirane pristupe,
- ▶ osigurati poticajnu atmosferu,
- ▶ poticati učenike da osmisle nova, originalna rješenja problema,
- ▶ uključiti u rad aktivnosti koje traže i omogućuju velik broj točnih odgovora,
- ▶ uvježbavati vještine:
 - ▶ konvergentnog mišljenja,
 - ▶ divergentnog mišljenja,
 - ▶ tehnika rada u području,
- ▶ razvijati strategiju postavljanja pitanja,
- ▶ voditi se idejom “*istina je nešto za čime još tragamo, a ne nešto što smo već usvojili*”,
- ▶ ...



Neke aktivnosti pogodne za poticanje razvoja matematičke darovitosti:

- ▶ **Matematičke igre,**
- ▶ **matematička natjecanja,**
- ▶ **suradnja s matematičkim časopisima** (prvenstveno kroz rješavanje nagradnih zadataka – poticanje na istraživački rad).



Matematičke igre

- ▶ Neke od njih **potiču razvoj logičko-matematičke inteligencije**, a neke **potiču razvoj vizualno-spacijalne inteligencije** (koja nije tipična karakteristika matematički darovite djece).
 - ▶ **Logičko-matematička inteligencija** razvija se matematikom, računalstvom i logikom.
 - ▶ **Vizualno-spacijalna inteligencija** razvija se deskriptivnom geometrijom i likovnim odgojem.
 - ▶ Osobe s razvijenom vizualno-spacijalnom inteligencijom jasno uočavaju detalje, lako se snalaze u prostoru i lako interpretiraju informacije u dvije ili tri dimenzije.
 - ▶ Uspješne su kod grafičkih prikazivanja te u igrama koje zahtijevaju sposobnosti preslagivanja.
 - ▶ Dobro poimaju odnose predmeta i likova u prostoru, čak i bez zorne podrške.
- ▶ Zanimljivi i dobro osmišljeni zabavni zadatci redovito izlaze u našem najboljem časopisu za mlade matematičare – *Matki*, a najčešći autor zanimljivih križaljki, rebusa i glavolomki bio je pok. profesor Zdravko Kurnik.



Neke teme pogodne za rad na dodatnoj nastavi matematike u osnovnim školama

- ▶ **Osnove nacrtna geometrije i kombinatorike u dječjim igrama**
- ▶ S učenicima četvrtog razreda mogu se ponekad raditi nestandardni zadaci s LEGO kockama – koji su pravi izazov za sve one koji vole igru.
 - ▶ Mogućnosti slaganja ovih kockica su mnogobrojne:
 - ▶ Od dvije 2·4 kockice možemo sastaviti čak 24 različite figurice, a od šest takvih kockica čak 915 103 756 figurica.
 - ▶ Zadatke s LEGO kockama najčešće ne možemo rješavati uobičajenim matematičkim alatima (npr. jednažbama ili uz pomoć geometrijskih formula).
 - ▶ **Pr. 1.** Složi najisplativiju figuru tlocrta 4·4.
 - ▶ Cilj igre – složiti figuru (čvrsti spoj dviju ili više LEGO kockica) koju gledajući odozgo vidimo kao pravokutnik traženih dimenzija.
 - Na raspolaganju su nam kockice dimenzija 2·2 i 2·4.
 - ▶ Traženu figuru treba složiti sa što manje nivoa (redova), a onda i sa što manje kockica.
 - ▶ **Pr. 2.** Složi najisplativiju figuru tlocrta 3·5.




▶ **Matematičke igre s prozirnom kockom i komadom žice**

▶ Kao i kod LEGO kocki, radi se o kombiniranju u 3D prostoru.

▶ Problem je lako postaviti i jednostavan je za razumijevanje.

- ▶ Potreban je prozirni model kocke na kojem ćemo neke bridove i neke dijagonale naglasiti obojenom žicom (žica je iz jednog komada i nigdje pri savijanju ne dodiruje samu sebe).
 - ▶ Ako nemamo taj materijal, skiciramo odgovarajuće situacije.
- ▶ Treba odrediti koji oblik žice vidimo ako kocku pogledamo sprijeda (nacrt), što vidimo odozgo (tlocrt), a što ako kocku gledamo sa strane (bokocrt).
- ▶ **Pr. 3.** Odredite tlocrt, nacrt i bokocrt za žicu unutar prozirne kocke.



-
- ▶ **Pr. 4.** Za zadani tlocrt, nacrt i bokocrt, odredite kako je žica savijena unutar prozirne kocke.
 - ▶ Obratno postavljen zadatak – znatno kompliciranija situacija.
 - ▶ Za rješavanje ovog zadatka potrebna je vizualno-spacijalna inteligencija, a ne znanje matematike.
 - ▶ Dobro je koristiti neke provjerene strategije.
 - Zamislamo da su svi bridovi, sve dijagonale strana i sve prostorne dijagonale kocke ovijene žicom.
 - Gledajući tlocrt, nacrt i bokocrt brišemo redom linije koje nisu moguće.
 - Može se zadati i ovakav zadatak koji nema rješenja – **vrlo je važno da se učenici susreću s obratnim zadacima i sa zadacima koji imaju više rješenja ili uopće nemaju rješenja.**
-
- 

▶ **Matematičke igre na šahovskoj ploči**

- ▶ Za rješavanje ovih zadataka učenici bi trebali poznavati šah ili barem znati kako se koja figura kreće po šahovskoj ploči.
 - ▶ Pravila igre mogu se jednostavno objasniti, uz pogled na šahovsku ploču sa složenim figurama:
 - ▶ Šah je igra za dva igrača.
 - ▶ Svaki igrač naizmjenice premješta po jednu figuru svoje boje po pravilu kretanja za tu figuru.
 - ▶ Ako se na polju na koje ćemo smjestiti figuru već nalazi protivnikova figura, protivnik je dužan figuru ukloniti s igraće ploče.
 - ▶ Pobjednik je igrač koji prvi s ploče izbaci (“pojede”) protivničkog kralja.
 - ▶ Pri rješavanju koristimo oznake:
 - ▶ Q – kraljica,
 - ▶ T – top,
 - ▶ S – skakač (konj),
 - ▶ L – lovac.
 - ▶ Problem se sastoji u postavljanju figura na šahovsku ploču (ili dio nje), tako da se figure međusobno ne napadaju (tj. da u idućem potezu niti jedna figura ne može “pojesti” neku drugu).
-





-
- ▶ **Pr. 5.** Na šahovsku ploču dimenzija 4·4 postavi četiri kraljice tako da se međusobno ne napadaju.
 - ▶ Rješenja su ista do na rotaciju (ona koja dobivamo rotacijom jedno iz drugoga smatramo jednakima).
 - ▶ *Dama* (naziva se i "kraljica") je najjača figura, kreće se neograničeno u svim smjerovima: okomito, vodoravno i dijagonalno.
 - ▶ **Pr. 6.** Na šahovsku ploču dimenzija 4·4 postavi šest lovaca tako da se međusobno ne napadaju.
 - ▶ *Lovac* (ranije se kod nas često koristio njemački naziv "laufer") kreće se neograničeno po dijagonalama. Ne može preskakati druge figure. Zbog takvog kretanja kreće se uvijek po poljima iste boje, pa govorimo o "bijelopoljcu" i "crnopoljcu".
 - ▶ **Pr. 7.** Koliko najviše topova možemo postaviti na šahovsku ploču od a redova i b stupaca, tako da se oni ne napadaju?
 - ▶ *Top* ("kula") kreće se neograničeno okomito i vodoravno. Ne može preskakati ostale figure.
-



▶ **Zabavni zadatci s farme**

- ▶ Zadatci tipa: *Ako kokoš za dan i pol snese jaje i pol, koliko jaja snesu dvije kokoši za šest dana. (Broj radnika koji u zadanom vremenu kopaju određeni broj rupa...)*
- ▶ Skupina zadataka kojom se uvježbava **uočavanje veza između upravoproporcionalnih i obrnutoproporcionalnih veličina.**
 - ▶ Iz zadatka određenog tipa, variranjem broja subjekata i uvjeta dobivamo niz zadataka određene težine.
 - ▶ Teži zadatci ovog tipa svode se na rješavanje sustava od više jednadžbi s više nepoznanica pa će ih uspješno rješavati samo najspretniji učenici završnih razreda osnovne škole.
- ▶ **Pr. 8.** Broj dana koji je potreban trima kokošima za šest jaja za dva je veći od broja kokoši koje će za tri dana snijeti tri jaja. Koliko jaja snese jedna kokoš za jedan dan?




-
- ▶ Ovakvi zadaci mogu se učiniti zanimljivijima, a i težima na više načina:
 - ▶ Možemo postaviti više vršitelja radnje iz zadatka, više vrsta proizvoda i više različitih uvjeta (npr. *Tri kokoši i dvije patke u jednom zimskom i dva ljetna dana snesu pet dobrih i jedno premalo jaje...*).
 - ▶ Možemo promijeniti odnose među vršiteljima radnje...
 - ▶ **Važno je da nastavnik unaprijed riješi svaki zadatak.**
 - ▶ **Dobro je i da učenici sami smišljaju zadatke, a zatim ih i riješe.**
-



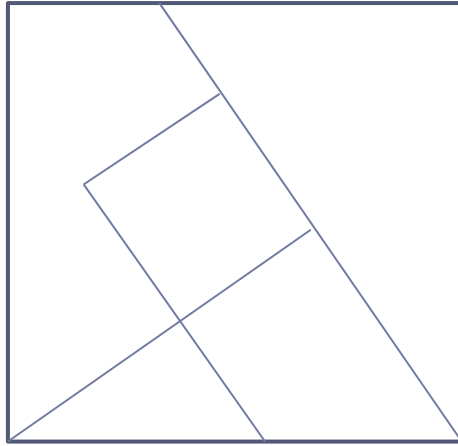
▶ **Sastavljanje i rastavljanje likova**

- ▶ Od zadanih likova treba sastaviti novi lik.
- ▶ Ovakvim zadacima se vježba logički misliti.
- ▶ Prilikom preslagivanja važno je držati se određenih pravila:
 - ▶ složeni lik ne smije sadržavati nikakve šupljine,
 - ▶ svi zadani dijelovi moraju biti dio novonastalog lika,
 - ▶ zadane dijelove zabranjeno je preklapati jedan preko drugog,
 - ▶ zadane dijelove nije dozvoljeno savijati ili bilo kako deformirati.
- ▶ Rješavanje ovakvih zadataka pretpostavlja ovladan pojam površine.
- ▶ U ovakvim zadacima koristimo sljedeće:
 - ▶ **Kako bi odredili površinu nekog lika nepravilnog oblika**, rastavljamo ga na više likova kojima znamo odrediti površinu. Zbrajanjem dolazimo do površine zadanog lika.
 - ▶ Obratno, poligon poznatog obrasca za površinu rastavljamo na više likova kojima znamo odrediti površinu te njihovim **preslagivanjem sastavljamo lik nepoznate formule za određivanje površine**. Zbrajanjem određujemo njegovu površinu.

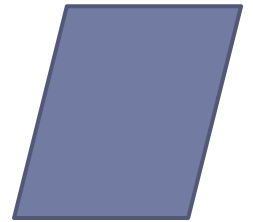
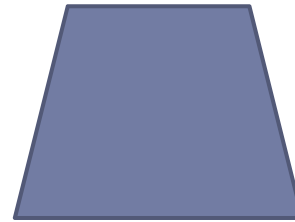
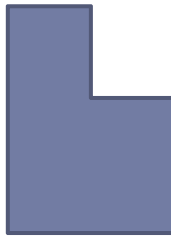
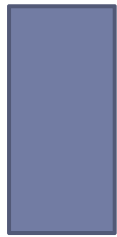
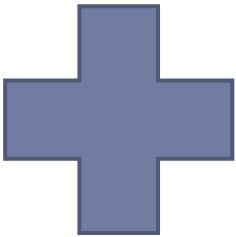
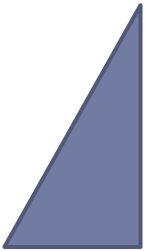



-
- ▶ Uvježbavajući kombinatorne sposobnosti učenika, uočavamo one s bolje razvijenom prostorno-spacijalnom inteligencijom, otkrivamo razinu učenikove sposobnosti mijenjanja pristupa rješavanju zadatka, je li motiviran za rad...
 - ▶ Učenicima treba pripremiti modele od kojih će sastaviti zadani lik, a korisno je i da učenici sami razrezuju zadani lik prema uputama nastavnika.
 - ▶ **Dobro je odabrati zadatke s više rješenja**, kao što je sljedeći:
 - ▶ **Pr. 9.** Nacrtaj kvadrat. Spoji polovište stranice s lijevom krajnjom točkom nasuprotne stranice. Povuci paralelu iz desnog vrha osnovice kvadrata. Zarotiraj kvadrat oko sjecišta dijagonala za 90° i ponovi postupak. Izbriši neke dužine kao što je to učinjeno na slici 1). Potom razreži kvadrat po tim crtama. Dobit ćeš pet dijelova. Od njih složi zadane oblike kao na slici 2).
-
- 

1)

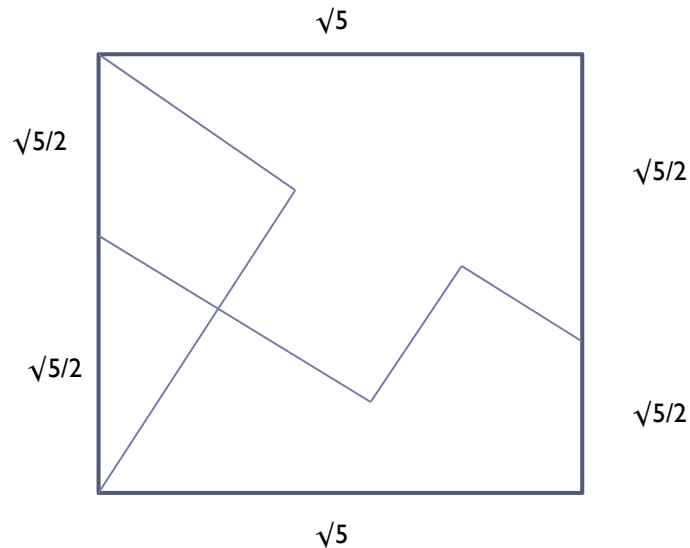
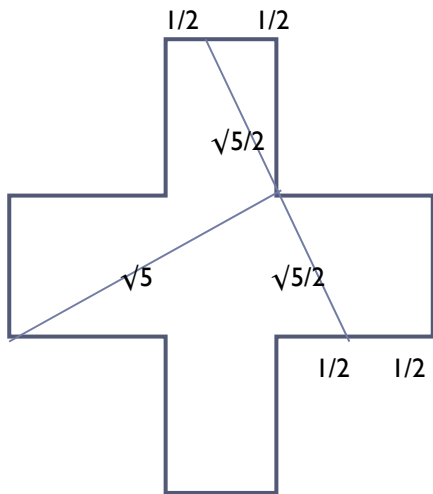


2)



-
- ▶ Prije zadavanja ovakvih zadataka, od nastavnika se očekuje da preslagivanjem zadanih komada i računom provjeri je li moguće, poštujući dogovorena pravila, dobivenim dijelovima popločiti likove slične onima na slici 2).
 - ▶ Npr. primjenom Pitagorina teorema (ili provjerom kolinearnosti točaka u koordinatnom sustavu ili na neki drugi način) provjeriti jesmo li preslagivanjem zaista dobili pravokutan trokut kao što nam se odoka čini.
 - ▶ Može se dogoditi da je među dijelovima pukotina koja se prostim okom kod preslagivanja ne može zamijetiti.
 - ▶ Učenike također treba upozoriti da “ono što se vidi” nema snagu dokaza u matematici nego zahtijeva dokaze provedene nekim matematičkim metodama.
 - ▶ Može se npr. “uroniti” polazni kvadrat u koordinatni sustav pa, određivanjem koordinata pojedinih točaka, jednadžbi pravca te određivanjem duljina stranica likova na koje je kvadrat razbijen, računom uvjeriti da su površine presloženih likova jednake površini polaznog kvadrata.
-
- 

- ▶ **Pr. 10.** Pođi od Malteškoga križa, tj. figure sastavljene od pet jediničnih kvadrata. Rasijeci križ pomoću dva okomita reza (kao na donjoj slici). Korištenjem Pitagorina teorema, dokaži da su križ i kvadrat jednakorastavljivi likovi u smislu Bolyai-Gerweinovog teorema.
 - ▶ **Bolyai-Gerwienov teorem** ima veliku primjenu u nastavi geometrije u osnovnoj školi: *Ako dva ravninska poligona imaju jednake površine, oni su jednakorastavljivi.*



-
- ▶ Educirani nastavnik može **podešavati težinu zadataka u vezi preslagivanja u skladu s interesom i dobi svojih učenika** – od sastavljanja jednostavnih puzzli namijenjenih predškolskoj djeci do problema koji će biti teški i najboljim studentima matematike.
 - ▶ Pr. 10. mogu uspješno rješavati učenici osmog razreda osnovne škole.



▶ Rješavanje križaljki

- ▶ *Sudoku* križaljka s brojevima kao vrsta razbibrige pojavila se 1979. godine u američkom časopisu *Dell Magazines*.
 - ▶ **Sudoku** ili učestalo **sudoko** (na japanskom znači jedan broj) je igra koja potječe iz Japana i igra se već 1000 godina.
 - ▶ To je vrsta slagalice čije je rješavanje temeljeno na logici.
 - ▶ Postoje različite težine te igre, a koristi se za zabavu ili testiranje inteligencije.
 - ▶ U svijetu se proširila tek 2005. godine kao neizostavan dio enigmatskih časopisa diljem svijeta...
 - ▶ Razne vrste sudoka možemo naći i u hrvatskim časopisima.
 - ▶ Zadatak je jednostavan:
 - ▶ U zadanu križaljku od n redaka i n stupaca treba upisivati prirodne brojeve od 1 do n , tako da kada ispunimo sve kvadratiće – u svakom retku, u svakom stupcu (i ako postoje, u svakom od označenih podskupova) svi brojevi budu različiti.
 - ▶ Tj. svaki broj **smije pojaviti točno n puta.**
-



-
- **Pr. 11.** Riješite zadani sudoku:

	6			2	5
5		2			
4			5		
2		5		3	4
	4				
		3	1		2

- Ovaj sudoku nema istaknutih podskupova pa treba paziti samo da se u svakom retku i stupcu nađu različiti brojevi od 1 do 6.
 - Važno je da brojeve ne unosimo pogađajući nego s valjanim obrazloženjem koje garantira jednoznačnost zapisa broja na odgovarajućem polju.
-



► Pr. 12. Riješi sudoku:

	8	4	1				3	
1		9			2			
2		3		6				8
					3	4		
4			2		7			5
		2	4					
9				5		2		6
			3			1		9
	2				8	7	5	

- Ovaj sudoku ima 9 istaknutih polja od 3-3 kvadratića pa treba paziti da se u svakom retku, u svakom stupcu, ali i u svakom od tih polja nađu brojevi od 1 do 9.
- Do rješenja dolazimo ponavljanjem i kombiniranjem triju pristupa koje ćemo navesti te nekim drugim trikovima (do kojih dolazimo sami strpljivim rješavanjem).
- **Ovakav sudoku ima jedinstveno rješenje.**

▶ **Postoje tri pristupa koja se najčešće koriste pri rješavanju ovakvog sudoka:**

□ **Prvi pristup:**

- Opredijelimo se za neki od brojeva od 1 do 9.
- Gledamo mjesta u sudoku gdje je taj broj već upisan (najprije gledamo brojeve kojih je najviše).
- Promatramo 3·3 polja u kojima tog broja nema i zaključujemo u koje kvadratiće tog polja promatrani broj ne može doći.
- Ako preostane samo jedno mjesto za upis, upisujemo broj, ako ne – tražimo dalje.

□ **Drugi pristup:**

- Pregledamo svaki od devet 3·3 polja (najprije gledamo one s najviše upisanih brojeva).
- Odredimo koji brojevi u tom polju nedostaju.
- Kombinacijom sa stupcima i retcima određujemo koji od nedostajućih brojeva možemo sa sigurnošću upisati.


□ **Treći pristup:**

- Promotrimo svaki od redova i stupaca (najprije gledamo one s najviše upisanih brojeva).
 - Odredimo koji brojevi u tom retku (ili stupcu) nedostaju.
 - Kombiniranjem s već upisanim brojevima određujemo gdje brojevi koji nedostaju mogu doći.
-



-
- ▶ **Kakuro** ima sličnu povijest kao i sudoku – prvi kakuro je objavio *Dell Magazines* 1966. godine.
 - ▶ Prvobitno je imao naziv Kasan Kurosu – što je kombinacija japanske riječi za zbrajanje i japanskog izgovora engleske riječi “cross”. Kasnije je naziv skraćen u kakuro.
 - ▶ Kakuro, kao i sudoku, postaje svjetski popularan krajem 2005. godine.
 - ▶ Ovu igru nalazimo u mnogim hrvatskim dnevnim listovima.

 - ▶ Pravila su jednostavna:
 - ▶ Kakuro se sastoji od crnih i bijelih polja.
 - ▶ Cilj je ispuniti bijela polja prema zadanim uvjetima.
 - ▶ Desno od zadanog broja (ili ispod broja – ovisi kako je zadano) treba upisati brojeve koji zbrojeni daju zadani broj.
 - ▶ Ti brojevi koje smo upisali moraju biti **različiti** i mogu biti samo jednoznamenasti brojevi i to: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**.

 - ▶ Za razliku od sudoka koji se temelji na permutacijama, za kakuro su bitne kombinacije.
 - ▶ Kakuro slagalice mogu biti različitih dimenzija i težina.
-
- 

► Pr. 13. Riješite kakuro:

		20	8	30		21	16	27	
	20 / 22				21				11
13					30				
21					16 / 11				
16			18 / 13			35 / 11			
	9	28 / 17						12	24
10				18 / 12			21 / 8		
29					27				
10					21				
	19				23				

- Neka su polja podijeljena dijagonalom na dva dijela – u gornjem desnom dijelu je broj kojeg treba rastaviti na određeni broj pribrojnika u retku, a u donjem lijevom dijelu u stupcu.

- ▶ Postoji puno trikova za rješavanje kakuro križaljki – za početak je dovoljno poznavati nekoliko osnovnih, a ostale rješavatelj nalazi sam nakon nekoliko riješenih kakura.

- ▶ Za početak je, prije rješavanja, potrebno uočiti da **neki brojevi imaju jedinstven rastav**.
 - ▶ Pr. ako je zadan broj 3 iza kojeg su dva prazna polja, očito možemo upisati samo 1 i 2 (u bilo kojem poretku).
 - ▶ I broj 4 ima jedinstven rastav $4 = 1+3$ (ili $3+1$), jer pribrojnici moraju biti različiti pa $2+2$ ne dolazi u obzir.
 - ▶ Još neki primjeri jedinstvenih rastava:
 - U dva polja – $16 = 7+9$, $17 = 8+9$,
 - u tri polja – $7 = 1+2+4$, $23 = 6+8+9$, $24 = 7+8+9$,
 - u četiri polja – $10 = 1+2+3+4$, $29 = 5+7+8+9$, $30 = 6+7+8+9$,
 - u pet polja – $15 = 1+2+3+4+5$, $34 = 4+6+7+8+9$, $35 = 5+6+7+8+9$,
 - u šest polja – $21 = 1+2+3+4+5+6$, $38 = 3+5+6+7+8+9$, $39 = 4+5+6+7+8+9$,
 - u sedam polja – $28 = 1+2+3+4+5+6+7$, $29 = 1+2+3+4+5+6+8$, $42 = 3+4+5+6+7+8+9...$

- ▶ **Možemo najprije pokušati naći mjesto u kojem samo jedan od devet dopuštenih brojeva može biti dio rastava pripadnog retka i stupca.**

- **Pr. 14.** Popuni zadanu kakuro križaljku po pravilima kakura, ali tako da upisani brojevi budu faktori, a ne pribrojnici, zadanog broja tj. za zadani broj upiši različite jednoznamenkaste brojeve čiji je umnožak zadani broj.

	1008	3360	24	4536	1890
280					
3780					
42			10 / 18		
1008					
8640					

Literatura

- ▶ George, D: *Obrazovanje darovitih: kako identificirati i obrazovati darovite i talentirane učenike*, Educa, Zagreb, 2005.
- ▶ Vlahović-Štetić, V.: *Daroviti učenici: teorijski pristup i primjena u školi*, IDIZ, Zagreb, 2005.
- ▶ Elezović, N: *Matematička natjecanja i rad s darovitim učenicima*, Element, Zagreb, 2007.
- ▶ Pavleković, M: *Matematika i nadareni učenici*, Element, Zagreb, 2009.

