1.
Temeljni pojmovi o trokutu

U ovom poglavlju upoznat ćemo osnovne elemente trokuta i odnose među njima. Zatim ćemo definirati težišnice, visine, srednjice, simetrale stranica i simetrale kutova trokuta. Iskazat ćemo i dokazati neke poučke koji se odnose na te pojmove. Središnje mjesto u poglavlju su poučci o četirima značajnim točkama trokuta.

Neki poučci su iskazani ili dokazani pomoću vektora. To su, uglavnom, poučci o vektorima stranica, vektorima težišnica i o težištu trokuta.

Uz dvije opće poznate kružnice trokuta (opisana i upisana kružnica), podrobno su obrađene i kružnice pripisane trokutu. Učinjena je i podjela trokuta. Definirani su jednakokračni, jednakostranični, raznostranični, šiljastokutni, pravokutni i tupokutni trokuti. Navedene su bitne osobitosti tih trokuta i dokazani neki poučci koji se odnose na njih.

Posebno su navedena tri važna poučka o trokutu: Cevin, Menelajev i Van Aubelov poučak. Ti su poučci važni sami po sebi, a još više zato što se pomoću njih jednostavnije dokazuju mnogi drugi poučci.

Na kraju poglavlja navedene (i izvedene) su neke formule za ploštinu trokuta.

U poglavlju je iskazano 15 definicija koje su označene: D1.1., D1.2.,. . . , D1.15.

Isto je tako navedeno i dokazano 48 poučaka: P1.1., P1.2.,. . . , P1.48.

Neke relacije među elementima trokuta izražene su formulama.

Tih je formula ukupno 46 u poglavlju i označene su: F1.1, F1.2,. . . , F1.46.

Napomenimo da su od tih 46 formula čak njih 25 formule za ploštinu trokuta.

Cijeli tekst poglavlja popraćen je s 48 crteža, a označeni su: sl.1.1., sl.1.2.,. . . , sl.1.48.

1.1. Osnovni elementi trokuta

Temeljni geometrijski pojmovi su točka, pravac i ravnina, te se ne definiraju i čitatelj intuitivno ima zorne predodžbe o njima. Isto su tako već u osnovnoj školi uvedeni pojmovi kao što su: dužina, polupravac, poluravnina, kut, udaljenost, duljina, opseg i ploština, zbog čega ćemo smatrati da su i ti pojmovi poznati. Također se pretpostavlja da su čitatelju poznati najjednostavniji pojmovi o skupovima, kao što su: element skupa, podskup, unija, presjek, razlika skupova i slično.

Definirat ćemo jedan važan pojam, a to je *konveksan skup*.

D1.1. *Neka je S bilo koji skup točaka. Ako su P i Q bilo koje dvije različite točke skupa S i ako je dužina $\overline{PQ}$ podskup skupa S, tada kažemo da je S konveksan skup. Skup koji nije konveksan jest nekonveksan ili konkavan.*

Neka je A (konačan ili beskonačan) skup zadanih točaka, to jest $A = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$, tada postoji beskonačno mnogo konveksnih skupova koji sadrže te zadane točke. Ako je S jedan od tih skupova, tako da je S podskup svakog od inih skupova koji sadrži te točke, kažemo da je S najmanji skup koji sadrži točke P_1, P_2, $P_3 \ldots$.

Iz D1.1. slijedi da je svaka dužina konveksan skup. Isto je tako, za zadane različite točke M i N, dužina $\overline{MN}$ najmanji konveksan skup koji sadrži te točke.

D1.2. *Ako bilo koja od tri promatrane točke pripada pravcu određenom s ine dvije točke, kazat ćemo da su te tri točke kolinearne. Inače su nekolinearne.*

Slično se definira i kolinearnost većeg broja točaka. Trokut se, kao i svaki drugi matematički pojam, može definirati na više različitih načina. Ovdje ćemo dati ovakvu definiciju trokuta.

D1.3. *Trokut je najmanji konveksan skup koji sadrži tri zadane nekolinearne točke.*

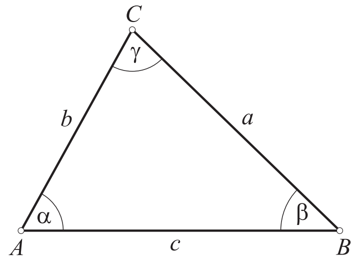
Ako su, na primjer, te točke P, Q i R, tada ćemo ovako definiran trokut označiti s $\triangle PQR$. (Ako kažemo trokut PQR, tada nije potrebno staviti oznaku $\triangle$.) Budući da bilo koje tri nekolinearne točke određuju ravninu, trokut određen tim točkama je podskup ravnine. Zato je svaki trokut ravninski skup točaka. Točke, kojima je u D1.3. određen trokut, zovu se vrhovi tog trokuta. Tako su, primjerice, nekolinearne točke A, B i C vrhovi trokuta ABC. Trokut ćemo najčešće označivati s $\triangle ABC$. Zato ćemo uvesti neke uobičajene oznake i nazive za elemente trokuta ABC. Dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ su stranice trokuta ABC. Duljine tih stranica označivat ćemo: $a = |BC|$, $b = |CA|$ i $c = |AB|$. Budući da je dužina najkraća spojnica dviju točaka, očito vrijedi sljedeća tvrdnja, poznata kao *nejednakost* trokuta. Duljina jedne stranice trokuta je manja od zbroja, a veća od razlike duljina inih dviju stranica tog trokuta.

Za dva različita broja a i b postoji samo jedan zbroj tih brojeva $(a + b = b + a)$ a dvije razlike $(a - b = -(b - a))$. Zato nejednakost trokuta obično pišemo ovako:

$$|b - c| < a < b + c, \quad |c - a| < b < c + a, \quad |a - b| < c < a + b \tag{I1}$$

Lako se pokaže da je svaka od ovih nejednakosti ekvivalentna sa svakom od inih dviju nejednakosti.

Kutovi: $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$ su unutarnji kutovi trokuta ABC. Na sl. 1.1 prikazane su uobičajene oznake za osnovne elemente trokuta ABC.



Sl. 1.1.

D1.4. *Ako su duljine dviju stranica trokuta međusobno jednake, trokut je jednakokračan. Stranice jednakih duljina su krakovi, a treća stranica jest osnovica jednakokračnog trokuta.*

U geometriji često koristimo pojmove sličnost i sukladnost. Budući da ćemo često koristiti sličnost i sukladnost trokuta, navest ćemo, bez dokaza, osnovne poučke o sličnosti i o sukladnosti trokuta.

P1.1. Poučci o sličnosti trokuta:

1. *Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dvama kutovima.*
2. *Dva su trokuta slična ako su im po dvije stranice razmjerne, a kutovi što ih određuju te stranice međusobno jednaki.*
3. *Dva su trokuta slična ako su im po dvije stranice razmjerne, a kutovi nasuprot većim od tih stranica međusobno jednaki.*
4. *Dva su trokuta slična ako su im sve tri stranice (u parovima) razmjerne.*

P1.2. Poučci o sukladnosti trokuta:

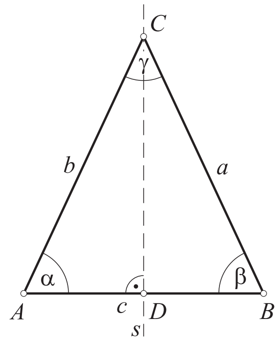
1. *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dvama kutovima uz tu stranicu.*
2. *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutu što ga određuju te stranice.*
3. *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutu nasuprot većoj od tih stranica.*
4. *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u svim trima stranicama.*

Vrijedi sljedeći poučak za jednakokračan trokut.

P1.3. *Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ osnovica jednakokračnog trokuta ABC. Treba dokazati: ako je $a = b$, tada je $\alpha = \beta$ (sl. 1.2).

Neka je D polovište stranice $\overline{AB}$, a pravac s simetrala dužine $\overline{AB}$. Budući da je simetrala dužine skup točaka, koje su jednako udaljene od rubnih točaka te dužine, slijedi da je zbog $a = b$ vrh C na simetrali s. Sada se lako pokaže da se trokuti ADC i BDC podudaraju u svim trima stranicama. Zbog toga su ti trokuti (do orijentacije) sukladni. Zato je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, to jest $\alpha = \beta$.



Sl. 1.2.

Poučak P1.3. može se iskazati u ekvivalentnom obliku:

P1.3a. *Kutovi nasuprot dvjema stranicama trokuta jednakih duljina su jednaki.*

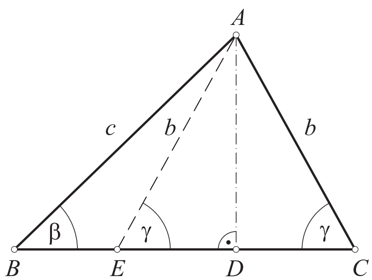
D1.5. *Ako su duljine svih triju stranica trokuta jednake, trokut se zove jednakostraničan ili pravilan.*

P1.4. *Sva su tri kuta jednakostraničnog trokuta međusobno jednaki.*

Dokaz. Tvrdnja poučka slijedi neposredno iz P1.3.

Sada možemo dokazati sljedeći poučak.

P1.5. *Kut nasuprot većoj od dviju stranica trokuta veći je od kuta nasuprot manjoj od tih dviju stranica.*

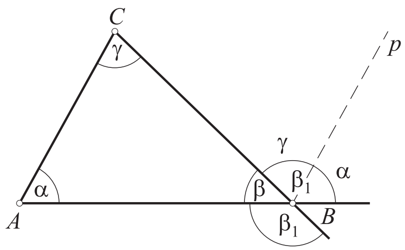


Sl. 1.3.

Dokaz. Neka je u trokutu ABC, $c > b$, treba dokazati da je $\gamma > \beta$ (sl. 1.3).

Neka je D nožište okomice iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, a E točka simetrična točki C, obzirom na D. Zbog $c > b$ slijedi $|BD| > |ED|$, a zbog toga je $\sphericalangle ABD < \sphericalangle AED$, to jest $\beta < \gamma$. Promatrali smo slučaj u kojem je $\gamma < 90^\circ$. Isto se pokaže i za $\gamma = 90^\circ$ i $\gamma > 90^\circ$.

D1.6. *Sukut unutarnjeg kuta trokuta zove se vanjski kut trokuta. (Sukut konveksnog kuta je kut koji s tim kutom ima jedan krak zajednički, a drugi se krakovi tih kutova nadopunjuju na pravac)*



Sl. 1.4.

Na sl. 1.4 je trokut ABC.

Na primjer, vanjski kut pri vrhu B možemo ostvariti na dva načina: nadopunjavanjem polupravaca BA ili BC, preko B na pravac. Kako su ti kutovi (po mjeri) jednaki, kažemo da svakom unutarnjem kutu odgovara jedan vanjski kut. Na našoj slici unutarnjem kutu β pridružen je vanjski kut β_1.

P1.6. *Mjera vanjskog kuta trokuta jednaka je zbroju mjera dvaju unutarnjih kutova koji s tim kutom nemaju zajednički vrh.*

Dokaz. Vrhom B trokuta ABC povučen je polupravac p, usporedan sa stranicom $\overline{AC}$, kao na sl. 1.4. Taj polupravac dijeli vanjski kut β_1 na dva kuta. Lako se pokaže da je mjera jednog od njih jednaka α, a drugog γ. Zato je $\beta_1 = \alpha + \gamma$. Isto se tako dokaže i za ina dva vanjska kuta trokuta, to jest da je:

$$\alpha_1 = \beta + \gamma, \quad \beta_1 = \gamma + \alpha \quad \text{i} \quad \gamma_1 = \alpha + \beta. \tag{F1.1}$$

P1.7. *Zbroj unutarnjih kutova trokuta jednak je 180° .*

Dokaz. Prema D1.6. vrijedi $\beta + \beta_1 = 180°$, a prema P1.6. $\beta = \gamma + \alpha$. Zato je

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°. \tag{F1.2}$$

P1.8. *Zbroj vanjskih kutova trokuta jednak je 360° .*

Dokaz. Prema P1.6. i P1.7. vrijedi:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \beta + \gamma + \gamma + \alpha + \alpha + \beta = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180° = 360°,$$

to jest

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°. \tag{F1.3}$$

1.2. Ostali elementi trokuta

U ovoj ćemo točki definirati još neke važne elemente trokuta a to su: srednjice, težišnice, simetrale stranica i simetrale unutarnjih kutova trokuta.

D1.7. *Spojnica polovišta dviju stranica trokuta zove se srednjica trokuta. Trokut ima tri srednjice.*

D1.8. *Spojnica vrha s polovištem nasuprotne stranice trokuta zove se težišnica trokuta. Trokut ima tri težišnice.*

D1.9. *Udaljenost jednog vrha od pravca nasuprotne stranice trokuta zove se visina trokuta. Trokut ima tri visine. (Često ćemo radi jednostavnijeg zapisa pod visinom trokuta podrazumijevati definiranu udaljenost, ali i pripadnu dužinu.)*

D1.10. *Pravac koji prolazi vrhom i dijeli unutarnji kut trokuta pri tom vrhu na dva sukladna kuta zove se simetrala unutarnjeg kuta trokuta. Pod duljinom simetrale unutarnjeg kuta podrazumijeva se duljina odreska te simetrale unutar trokuta.*

Potpuno se isto definira i simetrala vanjskog kuta trokuta.

D1.11. *Pravac koji prolazi polovištem jedne stranice trokuta i okomit je na tu stranicu jest simetrala stranice trokuta.*

1.3. Srednjice trokuta

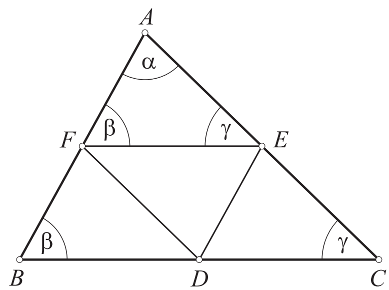
Srednjice trokuta definirane su u D1.7. Ovdje ćemo navesti i dokazati neke poučke koji su u svezi sa srednjicama trokuta.

P1.9. *Srednjica povučena polovištima dviju stranica trokuta je usporedna s trećom stranicom. Duljina te srednjice je jednaka polovici duljine treće stranice.*

Dokaz 1. Točke D, E i F su polovišta stranica trokuta ABC, kao na sl. 1.5.

Trokuti AFE i ABC su homotetični sa središtem homotetije u točki A i koeficijentom $\frac{1}{2}$ (jer je $|AF| = \frac{1}{2}|AB|$ i $|AE| = \frac{1}{2}|AC|$). Iz svojstva homotetije zaključujemo da je $FE\|BC$ i $|FE| = \frac{1}{2}|BC|$.

Postoji jednostavan vektorski dokaz ovog poučka, pa ćemo ga navesti.



Sl. 1.5.

Dokaz 2. $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$; $2\overrightarrow{FE} = (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}) + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE})$. Kako je $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$, slijedi da je $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, odakle je

$$FE\|BC \quad \text{i} \quad |FE| = \frac{1}{2}|BC|. \tag{F1.4}$$

P1.10. *Srednjice dijele trokut na četiri međusobno (do orijentacije) sukladna trokuta.*

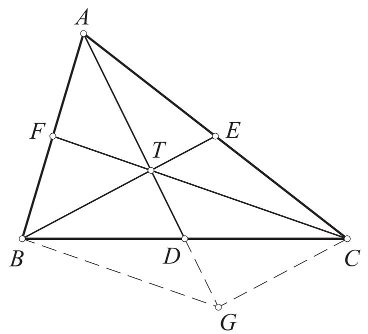
Dokaz. Prema P1.9. duljine stranica svakog od trokuta AFE, FBD, EDC i DEF su jednake polovici duljina stranica trokuta ABC. Zato su ti trokuti sukladni.

1.4. Težišnice i težište trokuta

Najprije ćemo dokazati poučak o težištu trokuta.

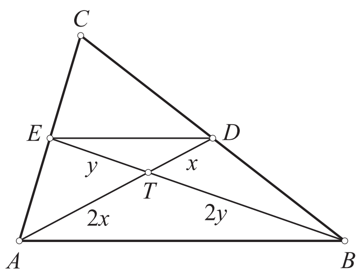
P1.11. *Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koju zovemo težište trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru* $2:1$*, mjereći od vrha trokuta.*

Dokaz. Neka su u trokutu ABC točke D i E polovište stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ (sl. 1.6). Težišnice $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ se sijeku u nekoj točki T (inače bi pravci AD i BE bili usporedni, što je nemoguće). Dovoljno je dokazati da je sjecište pravaca CT i AB, točka F, polovište stranice $\overline{AB}$. Dužinu $\overline{TD}$ produžimo preko D do točke G, tako da je $|DG| = |TD|$. Četverokutu $BGCT$ je paralelogram jer mu se dijagonale raspolavljaju. Zato je $GC \| BT$ i $GB \| CT$. Budući da je točka E polovište stranice $\overline{CA}$ i $TE \| GC$, $\overline{TE}$ je srednjica trokuta AGC. Zato je $TE \| GC$ i $|TE| = \frac{1}{2}|GC| = \frac{1}{2}BT$ i $|AT| = |TG| = 2|TD|$, to jest $|TD| = \frac{1}{2}|AT|$. Dalje je: $CT \| GB \implies TF \| GB$, točka T je polovište dužine $\overline{AG}$, zbog čega je $\overline{TF}$ srednjica trokuta ABG, a zbog toga je točka F polovište stranice $\overline{AB}$. Također je $|TF| = \frac{1}{2}|GB| = \frac{1}{2}|CT|$. Time je poučak dokazan.



Sl. 1.6.

P1.11a. Obrat poučka o težištu trokuta.
Ako su na stranicama $\overline{BC}$ *i* $\overline{CA}$ *trokuta* ABC *točke* D *i* E*, pri čemu se dužine* $\overline{AD}$ *i* $\overline{BE}$ *sijeku u točki* T *tako da je* $|AT| = 2|TD|$ *i* $|BT| = 2|TE|$*, tada je točka* T *težište trokuta* ABC*.*



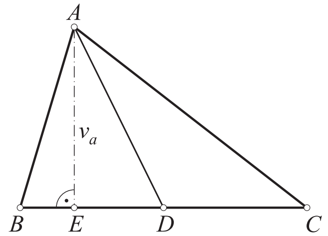
Sl. 1.7.

Dokaz. Prema pretpostavci, duljine pojedinih odrezaka možemo označiti kao na sl. 1.7. Lako se uoči da su trokuti DET i ABT homotetični sa središtem homotetije u točki s koeficijentom $k = -2$. Zbog toga je $|AB| = 2|ED|$ i $AB \| ED$, odakle zaključujemo da su trokuti EDC i ABC također homotetični sa središtem homotetije u točki C i koeficijentom 2.

Zbog toga su točke D i E polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, a zbog toga je T težište trokuta ABC.

P1.12. *Svaka težišnica dijeli trokut na dva trokuta jednakih ploština.*

Dokaz. Neka je u trokutu ABC točka D polovište stranice $\overline{BC}$, a E nožište visine iz vrha A tog trokuta (sl. 1.8). Težišnica $\overline{AD}$ dijeli trokut ABC na dva trokuta: ABD i ADC. Ta dva trokuta imaju jednake osnovice ($|BD| = |DC|$) i zajedničku visinu ($|AE|$) na te osnovice. Zato ti trokuti imaju jednake ploštine. Isto vrijedi i za ine dvije težišnice.

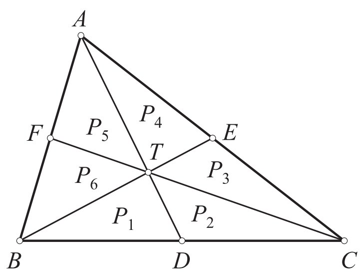


Sl. 1.8.

P1.13. *Težišnice dijele trokut na šest trokuta jednakih ploština.*

Dokaz. Ploštine nastalih šest trokuta označimo kao na sl. 1.9. Primijenimo li na trokute TBC, TCA i TAB poučak P1.12., dobit ćemo

$$P_1 = P_2, \quad P_3 = P_4, \quad P_5 = P_6.$$



Sl. 1.9.

Iz istog je razloga:

$$\begin{aligned}
P_1 + P_6 + P_5 &= P_2 + P_3 + P_4, \\
P_1 + P_2 + P_3 &= P_4 + P_5 + P_6, \\
P_3 + P_4 + P_5 &= P_1 + P_2 + P_6,
\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
P_6 + P_5 &= P_3 + P_4, \\
P_1 + P_2 &= P_5 + P_6, \\
P_3 + P_4 &= P_1 + P_2.
\end{aligned}$$

Dalje je $2P_5 = 2P_3$, $2P_1 = 2P_5$, $2P_3 = 2P_1$. Zbog svega toga je

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6. \tag{F1.5}$$

U daljnjem ćemo tekstu neke poučke iskazati pomoću vektora. Prije toga navest ćemo sljedeće definicije.

D1.12. *Za trokut ABC, vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ zovemo vektorima stranica tog trokuta.*

D1.13. *Ako su D, E i F polovišta stranica nasuprot vrhovima A, B i C trokuta ABC, tada vektore $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{CF}$ zovemo vektorima težišnica tog trokuta.*

D1.14. *Ako je O čvrsta točka, a P bilo koja točka ravnine, tada vektor $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ zovemo radijvektor točke P obzirom na ishodište O.*

P1.14. *Zbroj vektora stranica bilo kojeg trokuta jest nulvektor. Vrijedi i obrat: ako je zbroj triju nekolinearnih vektora nulvektor, tada postoji trokut kojemu su ti vektori vektori stranica.*

Dokaz. Za vektore stranica trokuta ABC vrijedi

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Dokažimo i obrat.

Neka za nekolinearne vektore $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ vrijedi $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$. Početak vektora $\vec{y}$ dovedimo u završetak vektora $\vec{x}$, a početak vektora $\vec{z}$ u završetak vektora $\vec{y}$. Označimo li $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, tada je $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$ i $\vec{z} = \overrightarrow{CD}$. Dovoljno je dokazati da se točka D podudara s točkom A, to jest da je $D \equiv A \iff \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Vrijedi, po pretpostavci,

$$\vec{0} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$

to jest

$$\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

Time je poučak dokazan.

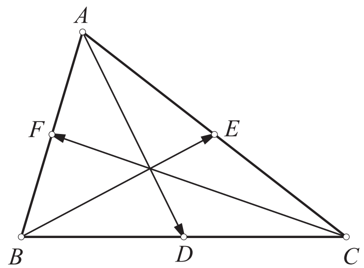
P1.15. *Za svaki trokut $\triangle_1$ postoji trokut $\triangle_2$, tako da su stranice trokuta $\triangle_2$ usporedne sa težišnicama trokuta $\triangle_1$, a duljine stranica trokuta $\triangle_2$ jednake duljinama težišnica trokuta $\triangle_1$.*

Poučak se jednostavnije može iskazati ovako:

Vektori težišnica bilo kojeg trokuta su vektori stranica nekog trokuta.

Dokaz. Ako su D, E i F polovišta stranica trokuta ABC, kao na sl. 1.10, dovoljno je, prema P1.14., dokazati da je

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}.$$



Sl. 1.10.

Vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{3}{2}\cdot\vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

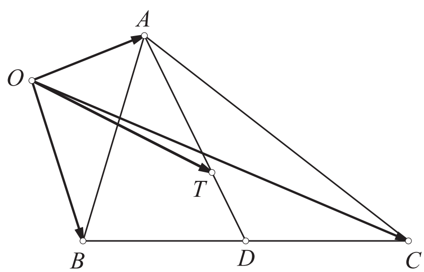
P1.16. *Za vektore težišnica trokuta ABC vrijedi:*

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}), \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}). \quad \text{(F1.6)}$$

Dokaz. Koristimo oznake na sl. 1.10. Vrijedi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, odakle je $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$. Budući da je $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, slijedi da je $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Isto se tako dokažu i ine dvije formule.

P1.17. *Ako je O bilo koja točka ravnine trokuta ABC, a T težište tog trokuta, tada vrijedi*

$$3\vec{r}_T = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C \quad \text{(F1.7)}$$



Sl. 1.11.

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\vec{r}_T &= \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),
\end{aligned}$$

odakle je (sl. 1.11)

$$3\vec{r}_T = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C.$$

P1.18. *Ako su D, E i F polovišta stranica trokuta ABC, tada trokuti ABC i DEF imaju zajedničko težište.*

Dokaz. Ako je T težište trokuta ABC, G težište trokuta DEF, a O bilo koja točka ravnine, dovoljno je pokazati da je $\vec{r}_G = \vec{r}_T$.

Prema P1.17. vrijedi $3\vec{r}_G = \vec{r}_D + \vec{r}_E + \vec{r}_F$, a prema P1.16. $\vec{r}_D = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$, $\vec{r}_E = \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_A)$, $\vec{r}_F = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$. Zato je

$$3\vec{r}_G = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_C + \vec{r}_A + \vec{r}_A + \vec{r}_B) = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C = 3\vec{r}_T,$$

to jest

$$\vec{r}_G = \vec{r}_T.$$

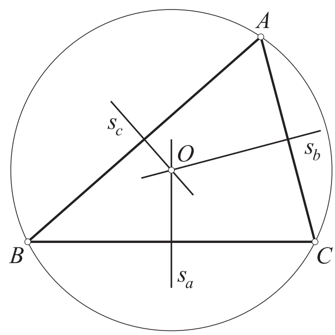
1.5. Simetrale stranica i trokutu opisana kružnica

Najprije dokažimo sljedeći poučak.

P1.19. *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Simetrale stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC označimo s_a, s_b i s_c (sl. 1.12).

Simetrale s_a i s_b sigurno se sijeku, inače bi stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ bile usporedne, što je nemoguće. Sjecište tih simetrala označimo s O. $O \in s_a \iff |OB| = |OC|$, $O \in s_b \iff |OC| = |OA|$. Odavde zaključujemo da je $|OA| = |OB| \iff O \in s_c$. Time je poučak dokazan.



Sl. 1.12.

P1.20. *Za svaki trokut postoji jedna i to samo jedna kružnica koja prolazi vrhovima trokuta. Ta se kružnica zove opisana kružnica tom trokutu, a središte kružnice je sjecište simetrala stranica trokuta.*

Dokaz. Ako je O sjecište simetrala stranica trokuta ABC, tada je (vidi P1.19.) $|OA| = |OB| = |OC|$, što znači da vrhovi trokuta pripadaju kružnici kojoj je središte točka O. Budući je kružnica jednoznačno određena trima nekolinearnim točkama, slijedi da je to jedina kružnica koja prolazi vrhovima trokuta ABC.

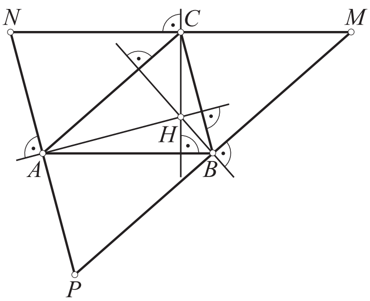
1.6. Visine i ortocentar trokuta

Visine trokuta definirali smo u D1.9. Sada ćemo dokazati neke poučke koji su u svezi s visinama trokuta.

P1.21. *Pravci visina trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta se točka zove ortocentar trokuta.*

Dokaz. Promatrajmo trokut ABC. Nacrtajmo trokut MNP kojemu su stranice usporedne sa stranicama trokuta ABC i prolaze vrhovima tog trokuta (sl. 1.13).

Četverokuti $ABMC$ i $ABCN$ su paralelogrami. Zato je $|AB| = |CM|$ i $|AB| = |NC|$, odakle je $|CM| = |NC|$. Isto je tako $|NA| = |AP|$ i $|PB| = |BM|$.



Sl. 1.13.

Simetrale stranica trokuta MNP sijeku se u jednoj točki, koju smo označili H. Budući da je $CH \perp NM$ i $NM \| AB$, slijedi da je $CH \perp AB$. Isto je tako $AH \perp BC$ i $BH \perp CA$. To znači da se visine trokuta ABC sijeku u točki H, koju zovemo ortocentar trokuta.

D1.15. *Trokut kojemu su vrhovi polovišta zadanog trokuta zove se polovišni trokut tog trokuta.*

P1.22. *Simetrale stranica bilo kojeg trokuta su pravci visina njemu polovišnog trokuta.*

Dokaz. Dokaz, uz oznake kao na sl. 1.13, neposredno slijedi iz dokaza P1.21.

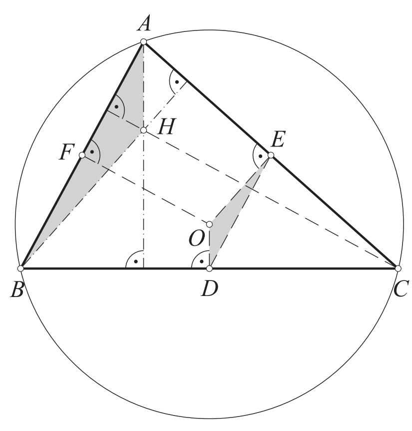
Poučak P1.22. možemo izreći i ovako:

Središte trokutu opisane kružnice podudara se s ortocentrom pripadnog polovišnog trokuta.

P1.23. Poučak o udaljenosti ortocentra od jednog vrha trokuta.
Udaljenost otrocentra od jednog vrha trokuta jednaka je dvostrukoj udaljenosti središta trokutu opisane kružnice od nasuprotne stranice trokuta.

Dokaz. Trokutu ABC opisana je kružnica k sa središtem u točki O. Točka H je ortocentar trokuta. Uz ostale oznake kao na sl. 1.14, treba dokazati da je $|AH| = 2|OD|$.

Pravac OD je simetrala stranice BC, pa je $OD \perp BC$, a kako je $AH \perp BC$, slijedi da je $OD \| AH$. Isto je tako $OE \| BH$. Dužina $\overline{DE}$ je srednjica trokuta ABC, zbog čega je $DE \| BC$. Vidimo da su stranice trokuta ODE i HAB (u parovima) usporedne, zbog čega ti trokuti imaju jednake kutove, a zbog toga su slični. Kako je $|DE| = \dfrac{1}{2}|BA|$, slijedi da je $|OD| = \dfrac{1}{2}|AH|$ i $|OE| = \dfrac{1}{2}|BH|$. Isto se tako dokaže da je $|OF| = \dfrac{1}{2}|CH|$, što je ekvivalentno tvrdnji poučka.



Sl. 1.14.

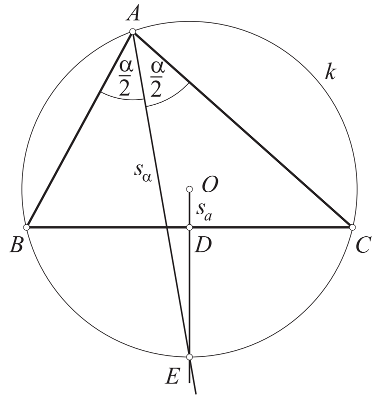
1.7. Simetrale unutarnjih kutova i trokutu upisana kružnica

Za svaki trokut postoje četiri važne, takozvane značajne točke. To su: težište, središte opisane kružnice, ortocentar i središte trokutu upisane kružnice. Prve tri od njih smo odredili i dokazali neke jednostavne poučke, koji su povezani s tim točkama. U ovoj točki odredit ćemo četvrtu od tih točaka. A prije toga dokazat ćemo neke poučke.

Sada ćemo navesti jedan vrlo jednostavan poučak u svezi simetrale kuta i simetrale nasuprotne stranice trokuta.

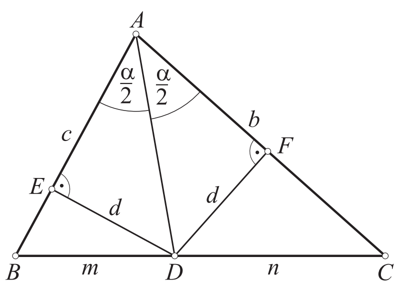
P1.24. *Simetrala unutarnjeg kuta iz jednog vrha trokuta i simetrala stranice nasuprot tom vrhu sijeku se na kružnici opisanoj tom trokutu.*

Dokaz. Neka je trokutu ABC opisana kružnica k. Simetrala stranice $\overline{BC}$, s_a siječe kružnicu k u točki E (sl. 1.15). Budući da ta simetrala raspolavlja stranicu $\overline{BC}$ $(|BD| = |CD|)$ i $s_a \perp BC$, ona raspolavlja i pripadni luk $\widehat{BC}$, to jest $|\widehat{BE}| = |\widehat{CE}|$. Budući da su obodni kutovi nad jednakim lukovima jednaki, slijedi da je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle CAE = \dfrac{\alpha}{2}$. To znači da simetrala kuta CAB prolazi točkom E. Time je poučak dokazan.



Sl. 1.15.

P1.25. Poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta.
Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu na dva odreska, čije se duljine odnose kao duljine inih dviju stranica trokuta, koje s tim odrescima imaju zajedničku točku.



Sl. 1.16.

Dokaz 1. Na sl. 1.16 povučena je simetrala kuta pri vrhu A trokuta ABC, koja nasuprotnu stranicu siječe u točki D. Uz oznake kao na slici treba dokazati da vrijedi $|BD| : |CD| = |AB| : |AC|$, ili

$$m : n = c : b. \qquad \text{(F1.8)}$$

Označimo li nožišta okomica iz točke D na pravce AB i AC s E i F, tada je $|DE| = |DF| = d$, jer je svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od krakova kuta.

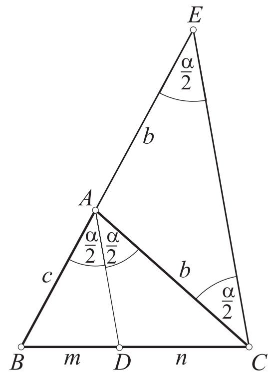
Ploštine trokuta ABD i ADC označimo s P_1 i P_2. Vrijedi $P_1 : P_2 = m : n$, jer ti trokuti imaju zajedničku visinu iz zajedničkog vrha A.

S druge strane je

$$P_1 : P_2 = \left(\frac{1}{2}cd\right) : \left(\frac{1}{2}bd\right) = c : b.$$

Zato je

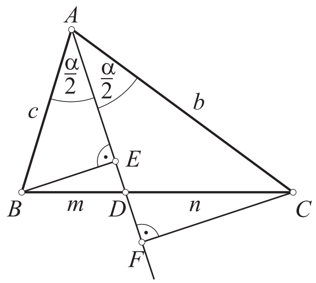
$$m : n = b : c.$$



Sl. 1.17.

Dokaz 2. (Dokaz “bez riječi”), sl. 1.17.

$$m : n = |BA| : |AE| = c : b.$$



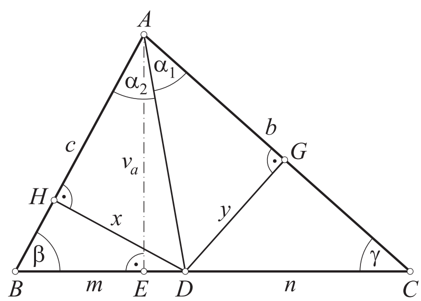
Sl. 1.18.

Dokaz 3. (Dokaz “bez riječi”), sl. 1.18.

$$m : n = |BE| : |CF| = c : b.$$

P1.25a. Obrat poučka o simetrali unutarnjeg kuta trokuta.
Ako pravac, povučen jednim vrhom trokuta, dijeli nasuprotnu stranicu u (unutarnjem) omjeru duljina inih dviju stranica (pri čemu svaki od tih dijelova s odgovarajućom stranicom ima zajednički vrh), tada je taj pravac simetrala tog kuta.

Dokaz. Neka pravac, povučen vrhom A trokuta ABC, dijeli kut pri tome vrhu na dva dijela (α_1 i α_2) i nasuprotnu stranicu siječe u točki D, pri čemu je $|DB| = m$ i $|DC| = n$ (sl. 1.19). Po pretpostavci je $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$. Treba dokazati da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, gdje je $\alpha = \sphericalangle CAB$.



Sl. 1.19.

Dovoljno je dokazati da je točka D jednako udaljena od krakova kuta CAB, to jest da je $x = |DH| = |DG| = y$. Ako je E nožište visine iz vrha A, tada su trokuti BDH i BAE slični, zbog čega je $\frac{x}{m} = \frac{v_a}{c}$. Isto tako, iz sličnih trokuta CDG i CAE imamo $\frac{y}{n} = \frac{v_a}{b}$. Dalje je

$$\frac{x}{y} = \frac{b\,m\,v_a}{c\,n\,v_a} = \frac{b}{c} \cdot \frac{m}{n} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1,$$

ili

$$x = y.$$

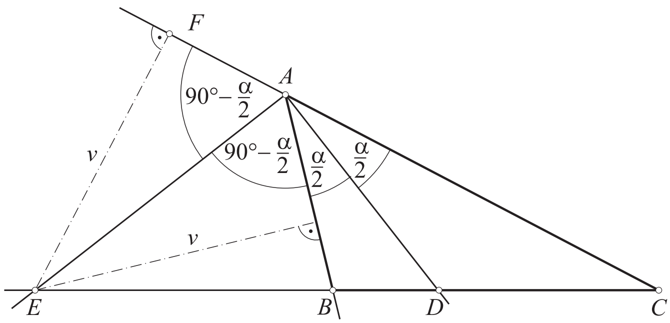
Time je poučak dokazan.

Zanimljivo je da simetrala vanjskog kuta i simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijele nasuprotnu stranicu u jednakom omjeru i to jedna u vanjskom, a druga u unutarnjem omjeru. Zato se poučak o simetrali vanjskog kuta trokuta može iskazati ovako:

P1.26. Poučak o simetrali vanjskog kuta trokuta.
Ako simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu A trokuta ABC siječe pravac BC u točki D, a simetrala pripadnoga vanjskog kuta u točki E, tada vrijedi:

$$|BE| : |CE| = |BD| : |CD| = c : b. \tag{F1.9}$$

Dokaz.



Sl. 1.20.

Koristimo oznake kao na sl. 1.20. Točka E jednako je udaljena od polupravaca AB i AF, zbog čega trokuti AEB i AEC imaju jednake visine (v) iz zajedničkog vrha E. Zato je $2P_{AEB} = cv$ i $2P_{AEC} = bv$, odakle je $P_{AEB} : P_{AEC} = c : b$.

S druge strane ti trokuti imaju zajedničku visinu (v_a) iz vrha A. Zato je $2P_{AEB} = |BE| \cdot v_a$ i $2P_{AEC} = |CE| \cdot v_a$, to jest $P_{AEB} : P_{AEC} = |BE| : |CE|$. Zbog svega toga je $|BE| : |CE| = c : b$.

U dokazu sljedećeg poučka koristit ćemo poznatu tvrdnju:

Ako je udaljenost točke P od pravca p jednaka d, tada je pravac p tangenta kružnice $k(P, d)$.

P1.27. *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka je središte trokutu upisane kružnice.*
Poučak se može izreći i ovako:
Svakom trokutu može se upisati kružnica, a središte te kružnice jest sjecište simetrala unutarnjih kutova trokuta.

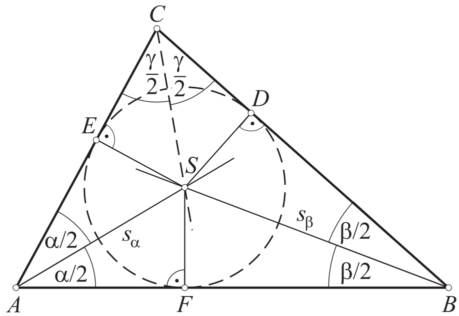
Dokaz. U dokazu ćemo koristiti činjenicu: Nuždan i dovoljan uvjet da točka pripada simetrali kuta jest da je ta točka jednako udaljena od krakova kuta.

Simetrale kutova CAB i ABC trokuta sigurno se sijeku. Sjecište tih simetrala označimo S, kao na sl. 1.21. Dovoljno je dokazati da je pravac CS simetrala kuta BCA.

Označimo li nožišta okomica iz točke S na stranice trokuta (sl. 1.21), tada zaključujemo:

$$S \in s_\alpha \iff |SE| = |SF|,$$
$$S \in s_\beta \iff |SF| = |SD|.$$

Odavde je $|SD| = |SE|$, što znači da je pravac CS simetrala kuta BCA. Označimo li $|SD| = |SE| = |SF| = r$, zaključujemo da su pravci stranica trokuta tangente kružnice $k(S,r)$, to jest da je ta kružnica upisana trokutu ABC.



Sl. 1.21.

P1.28. Poučak o duljini odrezaka što ih simetrala unutarnjeg kuta određuje na pripadnoj stranici trokuta.
Ako simetrala kuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, tada je

$$m = |BD| = \frac{ac}{b+c}, \qquad n = |CD| = \frac{ab}{b+c}. \tag{F1.10}$$

Dokaz. Koristimo oznake kao na sl. 1.16.

Prema P1.25., vrijedi $m : n = c : b$, odakle je $(m+n) : m = (c+b) : c$, ili $a : m = (b+c) : c$, odakle je $m = \dfrac{ac}{b+c}$. Također je $n = \dfrac{b}{c} \cdot m$, $n = \dfrac{ab}{b+c}$. Analogno vrijedi i za odreske na drugim dvjema stranicama trokuta.

P1.29. Poučak o udaljenostima vrhova od dirališta trokutu upisane kružnice.
Udaljenost vrha trokuta od dirališta upisane kružnice sa stranicama trokuta, kojima je taj vrh zajednički, jednaka je razlici poluopsega i duljine tom vrhu nasuprotne stranice.

Dokaz. Koristimo oznake kao na sl. 1.21. Treba dokazati:

$$|AE| = |AF| = s - a, \quad |BF| = |BD| = s - b, \quad |CD| = |CE| = s - c. \tag{F1.11}$$

Očito je $|AE| = |AF|$. Označimo: $|AE| = |AF| = x$, $|BF| = |BD| = y$, $|CD| = |CE| = z$. Vrijedi: $x+y = c$, $y+z = a$, $z+x = b$. Oduzmemo li prve dvije jednadžbe dobit ćemo $x - z = c - a$. Pribrojimo li ovo trećoj jednadžbi, imamo $2x = b+c-a = b+c+a-2a$. Označimo opseg trokuta $a+b+c = 2s$, dobijemo $2x = 2s - 2a$, ili $x = s - a$. Sada se lako izračuna $y = s - b$, $z = s - c$.

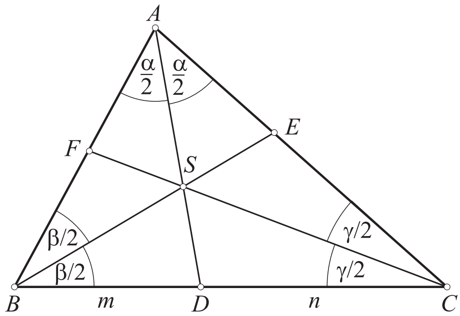
P1.30. Poučak o središtu trokutu upisane kružnice.
Središte trokutu upisane kružnice dijeli odrezak simetrale kuta povučene iz jednog vrha, a koji se nalazi unutar trokuta, u omjeru zbroja duljina stranica kojima je taj vrh zajednički i duljine treće stranice.

Dokaz. Poučak se može iskazati formulama:

$$|AS| : |SD| = (b+c) : a,$$
$$|BS| : |SE| = (c+a) : b, \qquad \text{(F1.12)}$$
$$|CS| : |SF| = (a+b) : c.$$

Dokaz ćemo provesti pomoću sl. 1.22.

Prema poučku P1.28. vrijedi $m = \dfrac{ac}{b+c}$. Primijenimo li na trokut ABD poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta (P1.25.), dobit ćemo



Sl. 1.22.

$$|AS| : |SD| = |AB| : |BD| = c : m = c : \frac{ac}{b+c} = 1 : \frac{a}{b+c},$$

ili

$$|AS| : |SD| = (b+c) : a.$$

Ine formule poučka dobijemo isto tako, ili kružnim zamjenama.

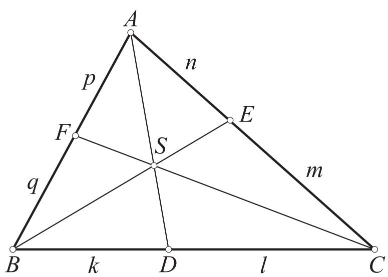
P1.30a. Dokaz obrata poučka o središtu trokutu upisane kružnice.
Ako je S točka unutar trokuta ABC, duljina stranica a, b i c, i ako pravci AS, BS i CS sijeku nasuprotne stranice u točkama D, E i F, tako da vrijedi $\dfrac{|AD|}{|DS|} = \dfrac{b+c}{a}$, $\dfrac{|BS|}{|ES|} = \dfrac{c+a}{b}$ i $\dfrac{|CS|}{|FS|} = \dfrac{a+b}{c}$, tada je S središte kružnice upisane trokutu ABC.

Dokaz. Koristimo oznake kao na sl. 1.23. Prema Cevinom poučku vrijedi $\dfrac{k}{l} \cdot \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{p}{q} = 1$, a prema Van Aubelovom poučku $\dfrac{|BS|}{|SE|} = \dfrac{k}{l} + \dfrac{q}{p}$ i $\dfrac{|CS|}{|SF|} = \dfrac{l}{k} + \dfrac{m}{n}$. Odavde je

$$\frac{k}{l} = \frac{c+a}{b} - \frac{q}{p} = \frac{c+a}{b} - \frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n},$$

a odavde

$$\frac{k}{l}\left(1 + \frac{m}{n}\right) = \frac{c+a}{b},$$
$$\frac{k}{l}\left(1 + \frac{a+b}{c} - \frac{l}{k}\right) = \frac{c+a}{b},$$
$$\frac{k}{l}\left(\frac{a+b+c}{c} - \frac{l}{k}\right) = \frac{c+a}{b},$$
$$\frac{k}{l} \cdot \frac{a+b+c}{c} = \frac{c+a}{b} + 1,$$
$$\frac{k}{l} \cdot \frac{a+b+c}{c} = \frac{c+a+b}{b},$$



Sl. 1.23.

i konačno

$$\frac{k}{l} = \frac{c}{b}.$$

Prema obratu poučka o simetrali unutarnjeg kuta trokuta, zaključujemo da točka S pripada simetrali kuta CAB. Isto se tako dokaže da točka S pripada i simetrali kuta ABC, što je dovoljno da je S središte kružnice upisane trokutu ABC.

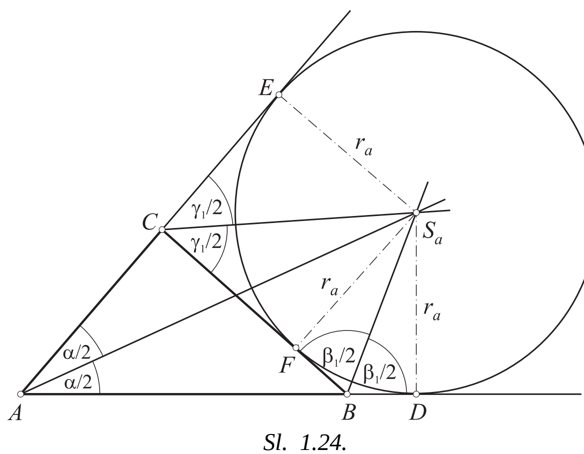
Napomena. Uvjeti $\dfrac{|AS|}{|DS|} = \dfrac{b+c}{a}$, $\dfrac{|BS|}{|ES|} = \dfrac{c+a}{b}$ i $\dfrac{|CS|}{|FS|} = \dfrac{a+b}{c}$ nisu nezavisni. Lako se dokaže da iz dva uvjeta slijedi treći.

1.8. Kružnice pripisane trokutu

Najprije dokažimo sljedeći poučak.

P1.31. *Simetrale dvaju vanjskih kutova pri dvama vrhovima i simetrala unutarnjeg kuta pri trećem vrhu trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta je točka središte trokutu pripisane kružnice.*

Dokaz. Na sl. 1.24 nacrtane su simetrale vanjskih kutova pri vrhovima B i C trokuta ABC. Te se simetrale sigurno sijeku i njihovo sjecište označimo S_a. Budući da točka S_a pripada simetrali kuta β_1, slijedi da je $|S_aD| = |S_aF|$. Isto tako točka S_a pripada simetrali kuta γ_1, zbog čega je $|S_aF| = |S_aE|$. Sada je $|S_aD| = |S_aE|$, što znači da točka S_a pripada simetrali kuta EAD, odnosno kuta CAB. To znači da se simetrale vanjskih kutova trokuta pri vrhovima B i C i simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu A sijeku u točki S_a.



Sl. 1.24.

Označimo li $|S_aD| = |S_aE| = |S_aF| = r_a$, zaključujemo da su pravci AB, AC i BC tangente kružnice $k_a(S_a, r_a)$. Ta se kružnica zove pripisana kružnica trokutu ABC uz stranicu $\overline{BC}$. Isto se tako definiraju kružnice $k_b(S_b, r_b)$ i $k_c(S_c, r_c)$ uz stranice $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC.

Dokažimo još neke poučke o trokutu pripisanim kružnicama.