

Zadaci s natjecanja - 1. razred srednje škole

15. studenog 2013.

1. Neka je n prirodan broj i $a \neq 0$ realni broj. Potpuno skratite razlomak

$$\frac{a^{3n+1} - a^4}{a^{2n+3} + a^{n+4} + a^5}.$$

2. Autobus krene iz početne stanice sa stanovitim brojem putnika. Na prvoj stanici izađe 20% putnika, a uđe 24 putnika. Na idućoj stanici izađe $\frac{2}{3}$ putnika, a nitko ne uđe. Na posljednjoj se stanici iskrca preostalih 16 putnika. Koliko je putnika ušlo u autobus na početnoj stanici?
3. Odredite sve parove nenegativnih cijelih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju jednadžbu: $2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13$
4. Prirodni broj n je umnožak četiri različita prosta broja p_1, p_2, p_3, p_4 manja od 250. Pritom za neka tri od njih vrijedi $p_1 p_2 p_3 = 3(p_1 + p_2 + p_3)$, a broj $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ima sve znamenke jednake. Odredite sve takve n .
5. Živahni zeko skakuće po livadi tako da se prvo pomakne 4 metra prema istoku, pa 2 metra jugozapadno, zatim 4 metra prema jugu. Koliko je zeko udaljen od početnog položaja?
6. Profesor Algebrić i profesor Korijenko razgovaraju. Prof. Algebrić: Kako godine prolaze... ja već imam 25% više godina, nego si ti imao kada sam ja imao godina koliko sada imaš ti. Prof. Korijenko: Eee... ako nas zdravlje posluži, kada ja budem imao godina koliko sada imaš ti, zajedno ćemo imati 168 godina. Koliko je kojem profesoru godina?
7. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c(a + 2b)} + \frac{1 - b^2 + a^2}{a(b + 2c)} + \frac{1 - c^2 + b^2}{b(c + 2a)} \geq 6$$

8. U jednakokrakom trokutu nalaze se dvije kružnice. Prva ima polumjer R i dodiruje sve stranice trokuta, a drugoj je polumjer r i dodiruje krakove trokuta i prvu kružnicu. Odredite opseg trokuta.
9. Odredite sve četveroznamenkaste brojeve, čije su prve dvije znamenke međusobno jednake i zadnje dvije znamenke međusobno jednake, a koji su potpuni kvadrati (tj. kvadrati nekog prirodnog broja).
10. Dokažite da je umnožak bilo koja dva elementa skupa

$$\{m \mid m = a^2 - 5b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$$

element istog tog skupa.

11. U nekom trokutu jedna je srednjica dulja od jedne težišnice. Dokažite da je taj trokut tupokutan.