

Zadaci s natjecanja - 2. razred srednje škole

29. studenog 2013.

1. Dokaži da je trokut jednakostraničan ako i samo ako je zbroj duljina njegovih visina jednak deveterostrukom polumjeru njegove upisane kružnice.
2. Odredi brojeve p i q , ako je poznato da je razlika korijena jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ jednaka 5, a razlika njihovih kubova 35.
3. Neka je $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Pokažite da je

$$(a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

4. U trokutu ABC poznate su duljine stranica $b = |AC|$ i $c = |AB|$ te vrijedi da je $\angle ABC = 3\angle BCA$. Na stranici \overline{AC} odabrane su točke D i E takve da je $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$. Izrazite pomoću b i c duljine dužina \overline{AD} , \overline{DE} , \overline{EC} .
5. Odredite sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.
6. Ako su a, b, c duljine stranica nekog trokuta, dokažite da je funkcija $f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ pozitivna za svaki realni broj x .
7. Dan je skup parabola $y = (k - 2)x^2 - 2kx + k + 2$, pri čemu je $k \neq 2$ realni broj.
 - a) Dokažite da tjemena svih tih parabola leže na istom pravcu i odredite njegovu jednadžbu.
 - b) Imaju li sve ove parabole zajedničku točku?
8. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijede nejednakosti:

a)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

b)

$$\frac{ab + c^2}{a + b} + \frac{bc + a^2}{b + c} + \frac{ca + b^2}{c + a} \geq a + b + c.$$