

Zadaci s natjecanja - 3. razred srednje škole

20. prosinca 2013.

1. Duljine stranica trokuta su a, b i $c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $a > b$. Dokažite da za kutove α, β , nasuprotne stranicama a, b vrijedi $\alpha - \beta = 90^\circ$.
2. Ako vrijede jednakosti $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ i $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1.$$

3. Dokažite da nejednakost

$$|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}$$

vrijedi za sve realne brojeve x .

4. Dani su realni brojevi a, b, c veći od 1. Dokažite sljedeću nejednakost:

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

5. Visina, simetrala kuta i težišnica povučene iz jednog vrha trokuta dijele kut na četiri jednaka dijela. Odredite kuteve trokuta.
6. Kugla je upisana u krnji stožac čije su osnovke centralni presjeci drugih dviju kugala. Odredite oplošje stošca ako je zbroj oplošja svih triju kugala jednak S .
7. Nađite sva rješenja nejednadžbe

$$\frac{2 \sin x - 1}{\cos 2x + \sin^2 x} < 0$$

na intervalu $[0, 2\pi]$.

8. Odredite sva cjelobrojna rješenja sustava jednažbi $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 + z^3 = -90$.

9. Riješite jednažbu

$$\log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \log_9 \log_9 \frac{x}{3}.$$

10. Dvije se kružnice dodiruju izvana u točki T . Jedna vanjska zajednička tangenta dodiruje te kružnice u točkama A i B , a \overline{BC} je promjer kružnice na kojoj leži točka B . Dokažite da se točka T nalazi na dužini \overline{AC} .

11. Ako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ dokažite sljedeći trigonometrijski identitet

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

12. Neka je H sjecište visina šiljastokutnog trokuta ABC . Dokažite da je

$$|BC| \cdot \operatorname{ctg} \angle CAB = |AH|.$$