

Zadaci s natjecanja - 4. razred srednje škole

10. siječnja 2014.

1. Ako je z rješenje jednadžbe $z^2 - z + 1 = 0$ izračunajte zbroj

$$z^{2004} + \frac{1}{z^{2004}}.$$

2. Ako su n i k prirodni brojevi, $k \leq n$, dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

3. Za koje realne brojeve a postoji kompleksan broj z sa svojstvima:

$$|z + \sqrt{2}| = \sqrt{a^2 - 3a + 2}$$

i

$$|z + i\sqrt{2}| < a?$$

4. Dokažite da je za svaki prirodan broj n , broj $(\tan 15^\circ)^n + (\cot 15^\circ)^n$ paran prirodan broj.

5. Za svaki prirodan broj n funkcija $f : N \rightarrow R$ zadovoljava uvjet

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n).$$

Ako je $f(1) = 1002$, odredite $f(2004)$.

6. Na koliko načina je moguće odabrati podskupove A, B, C skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ takve da vrijedi $A \cap B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$?

7. Neka je n prirodan broj i neka su $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ kompleksni brojevi takvi da za svaki izbor brojeva $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ iz skupa $\{-1, 1\}$ vrijedi

$$|\epsilon_1 z_1 + \dots + \epsilon_n z_n| \leq |\epsilon_1 w_1 + \dots + \epsilon_n w_n|.$$

Dokažite da je

$$|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |w_1|^2 + \dots + |w_n|^2.$$

8. Odredite sve realne brojeve α sa svojstvom da su svi brojevi u nizu

$$\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 2^2\alpha, \dots, \cos 2^n\alpha, \dots$$

negativni.

9. Odredite sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

10. Dokažite da je

$$\sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k} = 2^{2010}.$$

11. Sfera prolazi vrhovima donje osnovke kocke i dira sva četiri brida gornje osnovke. Ako je duljina brida kocke a , koliki je polumjer sfere?