Matematika 1 (2011/2012)

SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI

Linearni sustav od m jednadžbi s n nepoznanica, $m \geq n$ zapisujemo u obliku:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} i b_i su zadani brojevi, a $x_1, \ldots, x_n$ nepoznanice sustava.
Sustav linearnih jednadžbi je **homogen** ako su svi slobodni koeficijenti $b_1, b_2, ..., b_m$ jednaki nuli.
Rješenje sustava je svaka n-torka $(x_1, \ldots, x_n)$ koja identički zadovoljava sve jednadžbe.

Navedeni sustav možemo zapisati i u obliku $Ax = b$, pri čemu je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matrica A zove se **matrica sustava**, x je **matrica nepoznanica**, a vektor b se zove **matrica slobodnih članova** (slobodni vektor).
Pripadna **proširena matrica sustava** je:

$$A_P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Teorem Kronecker-Capelli (Rješivost sustava linearnih jednadžbi):
Sustav $Ax = b$ je rješiv ako i samo ako vrijedi $r(A) = r(A_p)$, pri čemu je A matrica sustava, a A_p proširena matrica sustava.

Neka sustav ima rješenje i neka je n broj nepoznanica. Vrijedi:

- Rješenje sustava je jedinstveno ako i samo ako je $r(A) = n$
- Ako je $r(A) < n$, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja (koja su izražena pomoću $n - r(A)$ parametara).

Gaussova metoda eliminacije:
Linearni sustav možemo predočiti u obliku **proširene matrice sustava**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Gaussova metoda eliminacije svodi se na to da se elementarnim transformacijama proširena matrica sustava svede na gornju trokutastu matricu. Iz tog oblika lako je očitati rješenja sustava. Elementarne transformacije koje se pri tome mogu koristiti su sljedeće:

i) zamjena dvaju redaka

ii) množenje retka skalarom različitim od nule

iii) dodavanje nekom retku drugi redak pomnožen skalarom različitiom od nule.

Cramerovo pravilo:
Cramerovo pravilo daje formulu za rješenje sustava linearnih jednadžbi u slučaju kada je matrica sustava regularna.

Neka je matrica sustava A regularna matrica reda n ($D = \det A \neq 0$). Tada kažemo da je sustav **određen** i postoji jedinstveno rješenje tog sustava linearnih jednadžbi čija i-ta komponenta glasi:

$$x_i = \frac{D_i}{D}.$$

D_i je determinanta matrice koju dobijemo tako da se u matrici A zamijeni i-ti stupac s vektorom slobodnih članova b.

Ako je pak $D = 0$ imamo dvije mogućnosti:

- Ako postoji barem jedan k takav da je $D_k \neq 0$ kažemo da je sustav **kontradiktoran**, odnosno nema rješenje.
- Ako je $D_k = 0$ za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, onda sustav može biti **neodređen** (ima beskonačno mnogo rješenja) ili kontradiktoran (nema rješenja). U ovom slučaju treba upotrijebiti neku drugu metodu rješavanja (npr. Gaussova metoda eliminacije).