BAZA I DIMENZIJA VEKTORSKOG PROSTORA

Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ **vektorski prostor** nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijede svojstva:

(V1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in V$;

(V2) $\exists 0 \in V$ tako da vrijedi $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in V$;

(V3) $\forall a \in V \quad \exists -a \in V$ tako da vrijedi $a + (-a) = -a + a = 0$;

(V4) $a + b = b + a, \forall a, b \in V$;

(V5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$;

(V6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$;

(V7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall a, b \in V$;

(V8) $1 \cdot a = a, \forall a \in V$.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Izraz oblika $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$, pri čemu su $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ i $k \in \mathbb{N}$, naziva se **linearna kombinacija** vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $S = \{a_1, a_2 \ldots, a_k\}, k \in \mathbb{N}$, konačan skup vektora iz V. Kažemo da je skup S **linearno nezavisan** ako za $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

U suprotnom kažemo da je skup S **linearno zavisan**.

Primjer. Lako se vidi da je $\{(1,0), (0,1)\}$ linearno nezavisan skup u $\mathbb{R}^2$. No skup $\{a_1 = (1,2), a_2 = (2,-1), a_3 = (0,5)\}$ u istom prostoru je zavisan jer vrijedi $a_3 = 2a_1 - a_2$.

Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kažemo da je S **sustav izvodnica** za V ako se svaki vektor iz V može prikazati kao linearna kombinacija elemenata skupa S, odnosno ako vrijedi

$$\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N}\} = V.$$

Primjer. Skup $S = \{(1,0),(0,1),(2,1)\}$ je sistem izvodnica za $\mathbb{R}^2$ jer se svaki vektor iz $\mathbb{R}^2$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz S.

Konačan skup $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}, n \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V zove se **baza** za V ako je B linearno nezavisan sustav izvodnica za V.

Primjer. Skup $B = \{(1,0),(0,1)\}$ je baza za $\mathbb{R}^2$ jer je B linearno nezavisan sustav izvodnica. Za razliku od općenitog sustava izvodnica, svaki vektor nekog prostora može se na **jedinstven način** prikazati kao linearna kombinacija vektora baze tog prostora.

Dimenzija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V je broj elemenata baze tog prostora.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neki njegov neprazan podskup. Kažemo da je M **potprostor** od V ako je i $(M,+,\cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V.

Napomena. Da bi pokazali da je M potprostor od V, dovoljno je pokazati da za $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $\forall a, b \in M$ vrijedi $\alpha a + \beta b \in M$.