Sveučilišni preddiplomski studij politehnike

Matematika 3

Sadržaj kolegija

- Pojam funkcije više varijabli. Područje definicije funkcije: nivo-linije i nivo-plohe.
- Otvoreni skupovi. Neprekidnost funkcije. Limes funkcije.
- Parcijalne derivacije. Geometrijska interpretacija diferencijala.
- Totalni diferencijal funkcije. Derivacija i diferencijal višeg reda.
- Teorem srednje vrijednosti. Taylorov teorem. Ekstremne vrijednosti funkcije.
- Uvjetni ekstremi. Najveća i najmanja vrijednost funkcije.
- Tangencijalna ravnina i normal.
- Vektorska analiza: skalarno i vektorsko polje. Parametrizacija Jordanovog luka.
- Derivacija skalarnog i vektorskog polja u smjeru vektora.
- Krivuljni integral 1. i 2. vrste i njihova primjena.
- Plošni integral 1. i 2. vrste i njihova primjena.
- Greenov teorem. Teorem Green-Gauss-Ostrogradski. Stokesova formula.
- Redovi funkcija. Taylorov red. Fourierov red.
- Diferencijalne jednadžbe. Egzaktna diferencijalna jednadžba.
- Parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Literatura:

- S. Kurepa: Matematička analiza II i III, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.
- Salih Suljagić: www.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node3.html
- B.P. Demidovič i ostali: Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike: s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.
- V.P. Minorski, Zbirka zadataka iz više matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

Ponavljanje

Podsjetimo se najprije pojma funkcije.

- Neka su A i B neprazni skupovi. Ako je svakom elementu skupa A pridružen po jedan element skupa B, onda kažemo da je ***definirana funkcija*** sa skupa A u skup B (ili da je skup A *preslikan* u skup B) i označavamo: $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

  Drugim riječima, neka su $\mathrm{A},\mathrm{B} \neq \emptyset$. Kažemo da je ***definirana funkcija*** $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ako vrijedi

  $$\forall x \in \mathrm{A},\ \exists!\, y \in \mathrm{B} \quad \text{takav da je } f(x) = y .$$

  Skup A zovemo **prirodna domena funkcije** f (ili **prirodno područje definicije funkcije** f) i označavamo s $\mathcal{D}(f)$, a skup B zovemo **kodomena funkcije** f i označavamo s $\mathcal{K}(f)$.
  Primijetimo da za funkciju $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ koristimo oznake: $\mathcal{D}(f) = \mathrm{A}$, $\mathcal{K}(f) = \mathrm{B}$.

  Element $y \in \mathrm{B}$ koji je funkcijom f pridružen elementu $x \in \mathrm{A}$ označavamo s $f(x)$ i pišemo: $y = f(x)$ te kažemo da je element y iz B slika elementa x iz A.

Napomena:

Kada domena funkcije f nije eksplicitno navedena, tada se prema dogovoru (konvenciji) misli na najsveobuhvatniji skup $\mathcal{D}(f)$ na kojem je funkcija f dobro definirana i taj skup zovemo prirodno područje definicije funkcije f .

S druge strane uz kodomenu $\mathcal{K}(f) = \mathrm{B}$ moguće je promatrati i skup vrijednosti koje funkcija f poprima na domeni $\mathcal{D}(f)$. Taj skup zovemo **područje vrijednosti** (rang, image) **funkcije** f i označavamo ga s $R(f)$ ili $Im(f)$ ili $f(A)$ ako je zadano preslikavanje $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.
Pritom je:

$$Im(f) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

i vrijedi: $Im(f) \subseteq \mathcal{K}(f)$, odnosno $Im(f) \subseteq \mathrm{B}$, gdje je $\mathcal{K}(f) = \mathrm{B}$.

Drugim riječima, područje vrijednosti funkcije f je podskup kodomene funkcije f. Time područje vrijednosti funkcije f može biti i jednak kodomeni funkcije f .

Funkcija $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ je dobro definirana ako za svaki x iz $\mathcal{D}(f) = \mathrm{A}$ prirodne domene funkcije f postoji y iz $Im(f) \subseteq \mathrm{B}$ područja vrijednosti funkcije f takav da je $y = f(x)$.

Funkciju možemo zadati tablično, formulom (analitički) ili grafički.

Kod funkcije koja je zadana formulom podrazumijeva se da njezino prirodno područje defincije (tj. prirodna domena) obuhvaća sve one točke za koje navedena formula ima smisla.

- Neka su A i B neprazni skupovi. Za funkciju $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ kažemo da je:

  - **surjekcija** ako je $Im(f)=\mathrm{B}$.

    Tada vrijedi: $(\forall y\in\mathrm{B})\ (\exists x\in\mathrm{A})$ takav da je $f(x)=y$.

  Drugim riječima: svaki element kodomene je slika barem jednog elementa prirodne domene.

  Za funkciju $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ kažemo da je:

  - **injekcija** ako za svaki $x,y\in\mathrm{A}$ iz $f(x)=f(y)$ proizlazi: $x=y$,

    odnosno: ako za svaki $x,y\in\mathrm{A}$ iz $x\neq y$ proizlazi: $f(x)\neq f(y)$.

  Drugim riječima: ako u kodomeni ne postoji element koji je slika dva ili više elementa iz prirodne domene.

  Za funkciju $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ kažemo da je:

  - **bijekcija** ako je funkcija f surjekcija i injekcija.

    Tada vrijedi: $(\forall y\in\mathrm{B})\ (\exists!\,x\in\mathrm{A})$ takav da je $f(x)=y$.

  Drugim riječima: ako je svaki element iz kodomene slika točno jednog elementa prirodne domene.

- Neka su $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ i $g:\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ dvije funkcije. Tada funkciju $h=g\circ f:\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ definiranu s:

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x)),\qquad \forall x\in\mathrm{A}$$

  zovemo **kompozicija funkcija** f i g.

Napomena:

Primijetimo da iz (1) $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ imamo da: $\forall x\in\mathrm{A}$, $\exists y\in\mathrm{B}$ takav da je: $f(x)=y$

i iz (2) $g:\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ imamo da: $\forall y\in\mathrm{B}$, $\exists z\in\mathrm{C}$ takav da je: $g(y)=z$.

proizlazi da postoji funkcija

$h:\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ pri čemu: $\forall x\in\mathrm{A}$, $\exists z\in\mathrm{C}$ takav da je: $h(x)=z$,

gdje je:

$$z=g(y)=g(f(x))=(g\circ f)(x).$$

S druge strane iz $z=h(x)$ i $z=(g\circ f)(x)$ proizlazi: $h(x)=(g\circ f)(x)$.

Pritom vrijedi: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ za svaki $x\in\mathrm{A}$.

Dakle, svakom elementu $x\in\mathrm{A}$ pridružen je potpuno određen element $(g\circ f)(x)\in\mathrm{C}$ čime je zadana funkcija $g\circ f:\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ sa skupa A u skup C i nazivamo ju **kompozicija funkcija** f i g.

Često se koristi oznaka: $h=g\circ f$, odnosno $h(x)=(g\circ f)(x)$ ili $h(x)=g(f(x))$.

Napomena:

- **Egzistencija kompozicije funkcija $g\circ f$ ne povlači egzistenciju kompozicije funkcija $f\circ g$.**

Drugim riječima, za kompoziciju funkcija ne vrijedi svojstvo komutativnosti i pišemo:

$$g \circ f \neq f \circ g .$$

Primijetimo da iz pretpostavke $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ i $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ proizlazi da postoji funkcija $g \circ f : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$. Pritom je prirodna domena funkcije g jednaka kodomeni funkcije f.

S druge strane, ako je $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ i $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, onda će postojati funkcija $f \circ g : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ ako je $\mathrm{A} = \mathrm{C}$.

Drugim riječima, prirodna domena funkcije f mora biti jednaka kodomeni funkcije g.

Ako je $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$, tj. ako su skupovi A i C različiti, onda kompozicije funkcija $f \circ g$ nije definirana.

Pretpostavimo da su f i g takve dvije funkcije za koje su definirane kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$.
Tada općenito ne vrijedi svojstvo komutativnosti. No, u specijalnim slučajevima može vrijediti svojstvo komutativnosti (tj. postoje funkcije za koje vrijedi svojstvo komutativnosti).

- **Za kompoziciju funkcija vrijedi svojstvo asocijativnosti.**

Neka su f, g i h tri funkcije za koje su definirane kompozicije $h \circ g$, $(h \circ g) \circ f$, $g \circ f$ i $h \circ (g \circ f)$. Tada vrijedi:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

(svojstvo asocijativnosti kompozicije funkcija).

- **Kompozicija bijektivnih funkcija je bijektivna funkcija.**

- Neka je A neki neprazni skup.

  Definiramo preslikavanje $i_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ takvo da je $i_{\mathrm{A}}(x) = x$ za svaki $x \in \mathrm{A}$ koje zovemo **identično preslikavanje skupa** A. Pritom za bilo koju funkciju f vrijedi:

$$f \circ i_{\mathrm{A}} = i_{\mathrm{A}} \circ f = f .$$

- **Inverzna funkcija** (inverz) funkcije $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ je funkcija $f^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ za koju vrijedi:

$$f^{-1} \circ f = i_{\mathrm{A}} \quad \text{i} \quad f \circ f^{-1} = i_{\mathrm{B}} .$$

Vrijede tvrdnje:

- Funkcija $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ ako i samo ako je f bijekcija.

- Funkcija $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ ako je f injekcija i ako je $Im(f) = \mathrm{B}$ (usporediti sa svojstvima surjektivnosti i bijektivnosti).

- Ako je funkcija $f^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ inverzna funkcija funkcije $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, onda vrijedi:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x .$$

Graf funkcije f^{-1} dobiva se iz grafa funkcije f simetrijom u odnosu na pravac $y = x$.

Pojam funkcije više varijabli

- Za funkciju $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ kažemo da je **realna funkcija** ako je njezina kodomena B sadržana u skupu realnih brojeva, tj. ako je $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$.

- Za funkciju $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ kažemo da je **kompleksna funkcija** ako je njezina kodomena B sadržana u skupu kompleksnih brojeva, tj. ako je $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{C}$.

U nastavku ćemo promatrati realne funkcije, tj. funkcije kojima je kodomena sadržana u skupu realnih brojeva.

- Ako su prirodna domena i kodomena funkcije $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ sadržane u skupu realnih brojeva tj. ako je $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$, onda kažemo da je f **realna funkcija realne varijable**.
  Pritom je $f(x) \in \mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$ vrijednost funkcije f na elementu $x \in \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$.
  Primjer: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

- Ako je prirodna domena funkcije $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ podskup kartezijevog produkta $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tj. $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ i ako je. kodomena funkcije f sadržana u skupu realnih brojeva, tj. $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$, onda kažemo da je f **realna funkcija dviju realnih varijabli**.
  Pritom je $f(x, y) \in \mathrm{B}$ vrijednost funkcije f na elementu $(x, y) \in \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$.
  Primjer: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 y - 3x + 5y - 4$.

- Ako je prirodna domena funkcije $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ podskup kartezijevog produkta $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tj. $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ i ako je. kodomena funkcije f sadržana u skupu realnih brojeva, tj. $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$, onda kažemo da je f **realna funkcija triju realnih varijabli**.
  Pritom je $f(x, y, z) \in \mathrm{B}$ vrijednost funkcije f na elementu $(x, y, z) \in \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.
  Primjer: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x^2 y - 3z + 5yz - 4$.

Općenito se definira realna funkcija n realnih varijabli na sljedeći način.

- Ako je prirodna domena funkcije $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ podskup kartezijevog produkta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, tj. $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n$, gdje je n bilo koji prirodan broj ($n \in \mathbb{N}$) i ako je. kodomena funkcije f sadržana u skupu realnih brojeva, tj. $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$, onda kažemo da je f **realna funkcija n realnih varijabli**.
  Pritom je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{B}$ vrijednost funkcije f na elementu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

  Primjeri realnih funkcija n realnih varijabli:

  1) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2x_1 x_2 \cdots x_n - 3x_1 x_{n-1} - 4$.

  2) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Napomena:

Treba razlikovati pojam **funkcija n varijabli** od pojma **realna funkcija n realnih varijabli**.

Neka je zadana funkcija $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, pri čemu su A i B bilo koji skupovi i neka je skup A (tj. prirodna domena funkcije f) podskup kartezijevog produkta $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$, tj. $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Tada kažemo da je f **funkcija n varijabli**.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{B}$ je vrijednost funkcije f na elementu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$, gdje je $x_1 \in \mathrm{A}_1,\ x_2 \in \mathrm{A}_2, \ldots,\ x_n \in \mathrm{A}_n$ za bilo koji $n \in \mathbb{N}$.

Drugim riječima, funkcija f svakoj uređenoj *n*-torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ iz skupa A pridružuje element $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ iz skupa B.

✐ Iz danih definicija možemo zaključiti da je pojam **funkcija n varijabli** općenitiji pojam od pojma **realna funkcija n realnih varijabli**. Naime, pod pojmom **realna funkcija n realnih varijabli** točno znamo da se radi o funkciji kojoj je prirodna domena podskup od $\mathbb{R}^n$, a kodomena joj je podskup skupa realnih brojeva. S druge strane, pod pojmom **funkcija n varijabli** znamo samo da je zadana funkcija kojoj je prirodna domena neki skup A koji je ujedno podskup kartezijevog produkta $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$ te da je njena kodomena neki skup B. Pritom skupovi A i B mogu biti sadržani u bilo kojem skupu brojeva $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

Primjeri realnih funkcija *n* realnih varijabli za $n = 2,3$

Primjeri realnih funkcija dviju realnih varijabli ($n = 2$)

1. Zbrajanje realnih brojeva $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ je realna funkcija dviju realnih varijabli koja svakom uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ realnih brojeva pridružuje realan broj $(x + y) \in \mathbb{R}$.

2. Oduzimanje realnih brojeva $(x, y) \mapsto x - y$ je realna funkcija dviju realnih varijabli koja svakom uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ realnih brojeva pridružuje realan broj $(x - y) \in \mathbb{R}$.

3. Množenje realnih brojeva $(x, y) \mapsto x \cdot y$ je realna funkcija dviju realnih varijabli koja svakom uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ realnih brojeva pridružuje realan broj $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

4. Dijeljenje realnih brojeva $(x, y) \mapsto \frac{x}{y},\ y \neq 0$ je realna funkcija dviju realnih varijabli koja svakom uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ realnih brojeva za koji je $y \neq 0$ pridružuje realan broj $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$.

5. $f(x, y) = \sin x \cos y - x^2 + 1$ je realna funkcija sa $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$.

6. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ je realna funkcija sa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \neq y^2\}$ u $\mathbb{R}$.

Primjeri realnih funkcija triju realnih varijabli ($n=3$)

1. $f(x,y,z)=x+y+z$ je realna funkcija triju realnih varijabli koja svakoj uređenoj trojci $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ realnih brojeva pridružuje realan broj $(x+y+z)\in\mathbb{R}$.

2. $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ je realna funkcija sa $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}$ kojoj su konstante $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

U nastavku će se uglavnom promatrati **realne funkcije dviju realnih varijabli**, koje se ponekad kraće (neprecizno) nazivaju funkcije dviju varijabli, time da će se neka svojstva realne funkcije dviju realnih varijabli generalizirati za realne funkcije više realnih varijabli, tj. za **realne funkcije *n* realnih varijabli**.

Geometrijsko prikazivanje funkcija.

Nivo-linije i nivo-plohe funkcije f.

Neka je $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ realna funkcija dviju realnih varijabli definirana na nepraznom skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. Tada je svakom uređenom paru $(x_0,y_0)\in\Omega$ pridružen realan broj $z_0=f(x_0,y_0)\in\mathbb{R}$ koji zovemo vrijednost funkcije f na elementu, tj. paru $(x_0,y_0)\in\Omega$.

- Skup svih točaka $(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3$ u pravokutnom koordinatnom sustavu prostora $\mathbb{R}^3$ takvih da je $(x,y)\in\Omega$, tj. skup:

$$\mathrm{M}_2=\{(x,y,f(x,y))\,|\,(x,y)\in\Omega\} \tag{1}$$

je **graf realne funkcije dviju realnih varijabli (** $x,y\in\mathbb{R}$ **)** koji je dvodimenzionalna ploha u tro-dimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Analogno, ako je $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ realna funkcija triju realnih varijabli definirana na nepraznom skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$. Tada je svakoj uređenoj trojci $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ pridružen realan broj $u_0=f(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}$ koji zovemo vrijednost funkcije f na elementu, tj. trojci $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$.

- Skup svih točaka $(x,y,z,f(x,y,z))\in\mathbb{R}^4$ u pravokutnom koordinatnom sustavu prostora $\mathbb{R}^4$ takvih da je $(x,y,z)\in\Omega$, tj. skup:

$$\mathrm{M}_3=\{(x,y,z,f(x,y,z))\,|\,(x,y,z)\in\Omega\} \tag{2}$$

je **graf realne funkcije triju realnih varijabli (** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **)** koji je trodimenzionalna ploha u četvero-dimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^4$.

- **Navedeno se može poopćiti i za graf realne funkcije n realnih varijabli na sljedeći način.**

Neka je $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ realna funkcija n realnih varijabli definirana na nepraznom skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$. Tada je svakoj uređenoj n-torci (točki) $P_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\in\Omega$ pridružen realan broj $f(P_0)=f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\in\mathbb{R}$ koji zovemo vrijednost funkcije f na elementu $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\in\Omega$.

- Skup svih točaka $(x_1,x_2,\ldots,x_n,f(x_1,x_2,\ldots,x_n))\in\mathbb{R}^{n+1}$ ili kraće $(P,f(P))\in\mathbb{R}^{n+1}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu prostora $\mathbb{R}^{n+1}$ takvih da je $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\Omega$, tj. skup:

$$\mathrm{M}_n=\{(P,f(P))\,|\,P\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\} \tag{3}$$

je **graf realne funkcije n realnih varijabli (** $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ **)** koji je n-dimenzionalna ploha u (n+1)-dimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Uočite razliku u notaciji $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ od $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Napomena:

U nekim literaturama skup M_n iz formule (3), tj. graf realne funkcije f n realnih varijabli označava se s Γ_f pa se formula (3) zapisuje u obliku:

$$\Gamma_f = \left\{ \left(P, f\left(P\right) \right) \mid P \in \Omega \right\} \ , \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n , \ n \geq 1. \tag{4}$$

Pritom se formula (4) interpretira u ovisnosti od vrijednosti prirodnog broja $n \geq 1$.

Konkretno,

- ako je $n = 1$, onda je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ pa je zadana funkcija f zapravo realna funkcija realne varijable, stoga u ovom slučaju skup Γ_f iz formule (4) je krivulja u realnoj ravnini $\mathbb{R}^2$;

- ako je $n = 2$, onda je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ pa je zadana funkcija f realna funkcija dviju realnih varijabli. U ovom slučaju skup Γ_f iz formule (4) jednak je skupu M_2 iz formule (1) i on je dvodimenzionalna ploha u realnom prostoru $\mathbb{R}^3$;

- ako je $n = 3$, onda je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ pa je zadana funkcija f realna funkcija triju realnih varijabli, stoga je u ovom slučaju skup Γ_f iz formule (4) jednak je skupu M_3 iz formule (2) i on je trodimenzionalna ploha u realnom prostoru $\mathbb{R}^4$;

- poopćenjem po prirodnom broju n dobiva se da je skup Γ_f iz formule (4) jednak skupu M_n iz formule (3) koja je *n*-dimenzionalna ploha u realnom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$.

Promatrajmo ponovo realnu funkciju dviju realnih varijabli definiranu na nepraznom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, tj. funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, gdje je svakom uređenom paru $\left(x_0, y_0 \right) \in \Omega$ pridružen realan broj $z_0 = f\left(x_0, y_0 \right) \in \mathbb{R}$ koji zovemo vrijednost funkcije f na elementu, tj. paru $\left(x_0, y_0 \right) \in \Omega$.

Kažemo da je funkcija f zadana *eksplicitnom jednadžbom*, ako je ona zadana jednadžbom oblika:

$$z = f\left(x, y\right) \qquad \text{za svaki } \left(x, y\right) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Ponovimo, skup Ω je prirodna domena funkcije f, a njezin graf je dvodimenzionalna ploha u realnom prostoru $\mathbb{R}^3$. S druge strane, graf funkcije f, tj. ploha u realnom prostoru $\mathbb{R}^3$ je skup $\mathrm{M}_2 = \left\{ \left(x, y, f\left(x, y\right) \right) \mid \left(x, y \right) \in \Omega \right\}$, tj. skup svih (varijabilnih) točaka $\left(x, y, f\left(x, y\right) \right) \in \mathbb{R}^3$ takvih da je $\left(x, y \right) \in \Omega$. Područje vrijednosti funkcije f je skup $Im\left(f \right) = \left\{ f\left(x, y\right) \mid \left(x, y\right) \in \Omega \right\}$.

✎ Postavlja se pitanje kako ćemo nacrtati graf realne funkcije dviju realnih varijabli?

Crtanje grafa realne funkcije dviju realnih varijabli izvodi se tako da svaki element prirodne domene, tj. par točaka $\left(x, y\right) \in \Omega$ nanosimo u *xy*-ravninu, a pripadne vrijednosti funkcije $z = f\left(x, y\right)$ za dani element $\left(x, y\right) \in \Omega$ nanosimo na os *z*. Pri tome dobivamo (varijabilne) točke $\left(x, y, f\left(x, y\right) \right) \in \mathbb{R}^3$ u realnom prostoru $\mathbb{R}^3$. Skup svih točaka $\left(x, y, f\left(x, y\right) \right) \in \mathbb{R}^3$ takvih da je $\left(x, y\right) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je dvodimenzionalna ploha u realnom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Uzimajući u obzir da je crtanje plohe u prostoru $\mathbb{R}^3$ relativno zahtjevno, grafički prikaz odgovarajuće plohe podrazumijeva tzv. reprezentiranje dvodimenzionalne plohe, tj. grafa realne funkcije f dviju realnih varijabli pomoću pripadne **familije nivo-krivulja funkcije** f koje nam ujedno omogućavaju dobivanje potrebnih informacija o obliku odgovarajuće plohe.

Pritom definiramo.

✎ **Nivo-krivulja funkcije** $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je skup točaka u prirodnoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ funkcije f u kojima realna funkcija f dviju realnih varijabli ima istu konstantnu vrijednost $c \in \mathbb{R}$.

Drugim riječima

- Presjek dvodimenzionalne plohe $z = f(x,y)$ i ravnine $z = c$, $c = konst.$ (paralelne s *xy*-ravninom) u prostoru $\mathbb{R}^3$ je familija krivulja $f(x,y) = c$ koja je skup svih točaka (x,y,c) u ravnini $z = c$ za koje je $f(x,y) = c$ i zove se **familija nivo-krivulja funkcije** f.

Određivanje konkretnih nivo-krivulja iz dane familije nivo-krivulja provodi se tako da se za konstantu $c \in \mathbb{R}$ odaberu konkretne vrijednosti $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$, a potom se u *xy*-ravnini nacrtaju pripadne nivo-krivulje

$$f(x,y) = c_1,\ f(x,y) = c_2, \ldots,\ f(x,y) = c_k \tag{5}$$

iz dane familije nivo-kriulja funkcije f.

Time se graf realne funkcije f dviju realnih varijabli reprezentira pomoću nivo-krivulja funkcije f u *xy*-ravnini. Jasno, pritom se podrazumijeva da svaku nivo-kriulju $f(x,y) = c_i$ iz ravnine $z = c_i$, $1 \le i \le k$ ortogonalno projiciramo u *xy*-ravninu.

U praksi se na ovakav način prikazuju sinoptičke karte. U tom slučaju funkcija f predstavlja tlak, a nivo-krivulje (5) se nazivaju *izobare*.

- Analogno gore navedenoj definiciji familije nivo-krivulja, definira se **familija nivo-ploha** time da se u ovom slučaju promatra realna funkcije f triju realnih varijabli. Definiramo:

✎ **Nivo-ploha funkcije** $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je skup točaka u prirodnoj domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ funkcije f u kojima realna funkcija f triju realnih varijabli ima istu konstantnu vrijednost $c \in \mathbb{R}$.

Drugim riječima

- Presjek trodimenzionalne plohe $u = f(x,y,z)$ i hiperravnine $u = c$, $c = konst.$ (paralelne s *xyz*-prostorom) u prostoru $\mathbb{R}^4$ je familija ploha $f(x,y,z) = c$ koja je skup svih točaka (x,y,z,c) u hiperravnini $u = c$ za koje je $f(x,y,z) = c$ i zove se **familija nivo-ploha funkcije** f.

Dimenzija hiperanine je za jedan manja od dimenzije prostora. Dakle u prostoru $\mathbb{R}^4$ je dimenzija hiperravnine $u = c$ jednaka 3.
Analogno prethodnim razmatranjima za nivo-kriulje i primjenom navedene definicije graf funkcije triju realnih varijabli reprezentira se pomoću nivo-ploha funkcije f u *xyz*-prostoru, pri čemu se svaka nivo-ploha $f(x,y,z) = c_i$ iz hiperravnine $z = c_i$, $1 \le i \le k$ ortogonalno projiciramo u *xzy*-prostor.

Otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

- Podsjetimo se da je otvoreni interval $\langle a,b \rangle$, $a<b$ otvoreni skup u skupu $\mathbb{R}$ (realnih brojeva). Pritom se skup realnih brojeva geometrijski predočuje brojevnim pravcem.

Prirodo se nameće pitanje: što je otoreni skup u realnoj ravnini $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, trodimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ i općenito u *n*-dimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$.

Neka su $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ i $Q=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ dvije točke u $\mathbb{R}^n$.

Tada se **udaljenost između točaka** *P* i *Q* izračunava po formuli:

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\,. \tag{6}$$

Funkcija (6) zadovoljava tzv. ***nejednakost trokuta***:

$$\boxed{d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q)}$$

za bilo koje tri točke $\mathrm{P,Q,R}\in\mathbb{R}^n$, gdje je: $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $Q=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ i $R=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$.

Uočimo da iz formule (6) za $n=2$ i $n=3$ proizlaze poznate formule za udaljenost točaka u ravnini i prostoru.

- Konkretno, za $n=2$ neka su $P_1=(x_1,y_1)$ i $P_2=(x_2,y_2)$ dvije točke u realnoj ravnini $\mathbb{R}^2$.
  Tada se udaljenost između točaka P_1 i P_2 izračunava primjenom formule:

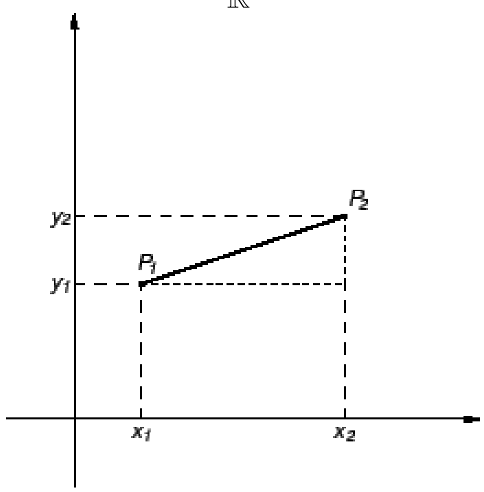
$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\,. \tag{7}$$

  Analogno, za $n=3$ neka su $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ i $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ dvije točke u realnom prostoru $\mathbb{R}^3$.
  Tada se udaljenost između točaka P_1 i P_2 izračunava primjenom formule:

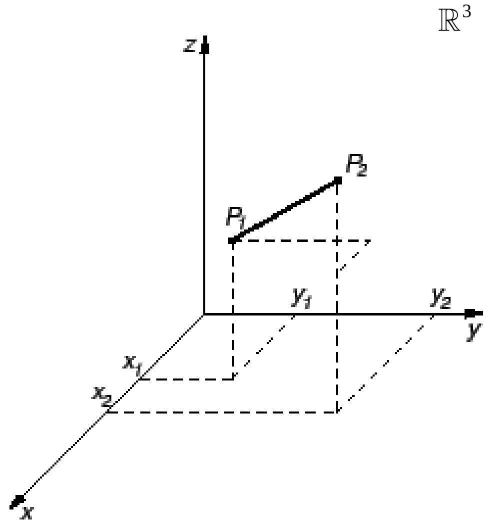
$$d(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\,. \tag{8}$$

Što primijećujete uspoređivanjem formula (7) i (8) s formulom (6)?

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



Definicija 1

Neka je $P_0=(x_0,y_0)$ neka fiksna točka u ravnini $\mathbb{R}^2$ i neka je realan broj $r>0$. Tada se skup

$$K(P_0;r)=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,P_0)<r\} \tag{9}$$

svih točaka $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ za koje je $d(P,P_0)<r$ naziva **otvoreni krug** polumjera *r* sa središtem u točki $P_0=(x_0,y_0)$.

Analogno, neka je $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ neka fiksna točka u prostoru $\mathbb{R}^3$ i neka je realan broj $r>0$. Tada se skup

$$K(P_0;r)=\{P\in\mathbb{R}^3 \mid d(P,P_0)<r\}$$

svih točaka $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ za koje je $d(P,P_0)<r$ naziva **otvorena kugla** polumjera *r* sa središtem u točki $P_0=(x_0,y_0,z_0)$.

Općenito, neka je $P_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ neka fiksna točka u *n*-dimnzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ i neka je realan broj $r>0$. Tada se skup

$$K(P_0;r)=\{P\in\mathbb{R}^n \mid d(P,P_0)<r\} \tag{10}$$

svih točaka $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ za koje je $d(P,P_0)<r$ naziva **otvorena kugla** u prostoru $\mathbb{R}^n$ polumjera *r* sa središtem u točki $P_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$.

Napomena:

Uočimo da primjenom formule (6) za izračunavanje udaljenosti dviju točaka u *n*-dimnzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ proizlazi da se skup (10) može zapisati u obliku nejednadžbe

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2<r^2,$$

koja predočuje otvorenu kuglu $K(P_0;r)$ (u prostoru $\mathbb{R}^n$) polumjera *r* sa središtem u točki $P_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ i naziva se ***kružna okolina*** točke $P_0\in\mathbb{R}^n$.

Definicija 2

Za skup $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ kažemo da je **otvoren skup** u prostoru $\mathbb{R}^n$ ako svaka točka $P_0\in\Omega$ ima kružnu okolinu koja je sadržana u Ω.

Drugim rječima, skup $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ je otvoren skup u prostoru $\mathbb{R}^n$ ako se oko svake njegove točke $P_0\in\Omega$ može opisati otvorena kugla (sa središtem u točki $P_0\in\Omega$ polumjera *r*), koja je sadržana u skupu Ω.

Po definiciji se podrazumijeva da je prazan skup otvoren skup.

Primjeri otvorenih skupova

1. Svaka otvorena kugla u $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ je otvoren skup.
2. Otvorena kugla $K((3,1);2)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(3,1))<2\}$ je otvoren skup.

3. Otvoren pravokutnik

$$I = \langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \; c < y < d \}$$

(tj. otvoren interval u ravnini $\mathbb{R}^2$) je otvoren skup u $\mathbb{R}^2$.

Uočimo da se oko svake točke $P_0 \in I$ (otvorenog pravokutnika u $\mathbb{R}^2$) može opisati kružnica koja leži u I. Ako je r polumjer te kružnice, onda je $K(P_0;r) \subseteq I$.

4. Analogno, otvoren *n*-kvadar

$$I = \langle a_1,b_1 \rangle \times \langle a_2,b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n,b_n \rangle$$
$$= \{ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 < x_1 < b_1, \; a_2 < x_2 < b_2, \ldots, \; a_n < x_n < b_n \}$$

(tj. otvoren interval u prostoru $\mathbb{R}^n$) je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.

5. Ako su $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$, onda vrijedi:

- $\Omega_1 \times \Omega_2$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^2$;
- $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^3$;
- $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_k$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^k$ za svaki $1 \le k \le n$.

Definicija 3

Okolinom skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ nazivamo svaki otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ koji sadrži skup *S*.

✐ Jedna od okolina skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je skup $\mathbb{R}^n$ koji je uvijek otvoren.

Definicija 4

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ zovemo **zatvorenim skupom** u prostoru $\mathbb{R}^n$ ako je njegov komplement $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ otvoren skup.

Definicija 5

Neka je je $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ neka fiksna točka u *n*-dimnzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ i neka je realan broj $r > 0$. Tada skup

$$\overline{K}(P_0;r) = \{ P \in \mathbb{R}^n \mid d(P,P_0) \le r \}$$

tj. skup svih točaka $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ za koje je

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2 \le r^2$$

zovemo **zatvorenom kuglom** u prostoru $\mathbb{R}^n$.

✐ Uočimo da se zatvoreni krug dobiva ako se otvorenom krugu doda njegov rub, tj. kružnica.

✐ Ako se otvorenom skupu doda samo dio ruba, tj. dio kružnice, onda se dobiva skup koji nije ni otvoren ni zatvoren.

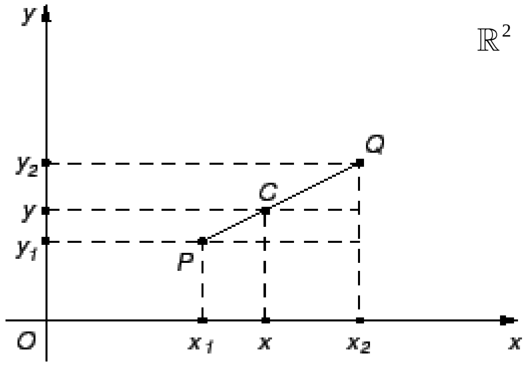
Spojnica, konveksan skup, područje

Neka su $P=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ i $Q=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ dvije točke u prostoru $\mathbb{R}^n$.

✐ **Spojnica** točaka P i Q je skup svih točaka na pravcu PQ takvih da leže između točaka P i Q.

Konkretno, promotrimo spojnicu dviju točaka u ravnini $\mathbb{R}^2$.

Neka su $P=(x_1,y_1)$ i $Q=(x_2,y_2)$ dvije proizvoljne točke u ravnini $\mathbb{R}^2$ i neka je točka $C=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ bilo koja (varijabilna) točka na spojnici točaka P i Q.



Spojnica točaka P i Q

Tada koordinate x i y točke C zadovoljavaju sljedeću jednakost:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=t \qquad \text{za svaki} \quad 0\le t\le 1$$

odakle proizlazi:

$$x=x_1+t(x_2-x_1), \qquad y=y_1+t(y_2-y_1),$$

odnosno

$$x=(1-t)x_1+tx_2, \qquad y=(1-t)y_1+ty_2 \qquad \text{za svaki} \quad 0\le t\le 1.$$

➢ Analogno gore navedenom dobivano da koordinate x, y i z bilo koje točke $C=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ na spojnici točaka $P=(x_1,y_1,z_1)$ i $Q=(x_2,y_2,z_2)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ možemo pisati u obliku:.

$$x=(1-t)x_1+tx_2, \qquad y=(1-t)y_1+ty_2, \qquad z=(1-t)z_1+tz_2 \qquad \text{za svaki} \quad 0\le t\le 1.$$

Time zaključujemo da točke $\left((1-t)x_1+tx_2,\ (1-t)y_1+ty_2,\ (1-t)z_1+tz_2\right)$ za svaki $0\le t\le 1$ leže na spojnici točaka $P=(x_1,y_1,z_1)$ i $Q=(x_2,y_2,z_2)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$.

Općenito u n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ točke

$$\left((1-t)x_1+ty_1,\ (1-t)x_2+ty_2,\dots,\ (1-t)x_n+ty_n\right) \qquad \text{za svaki} \quad 0\le t\le 1$$

leže na spojnici točaka $P=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ i $Q=(y_1,y_2,\dots,y_n)$.

Definicija 6

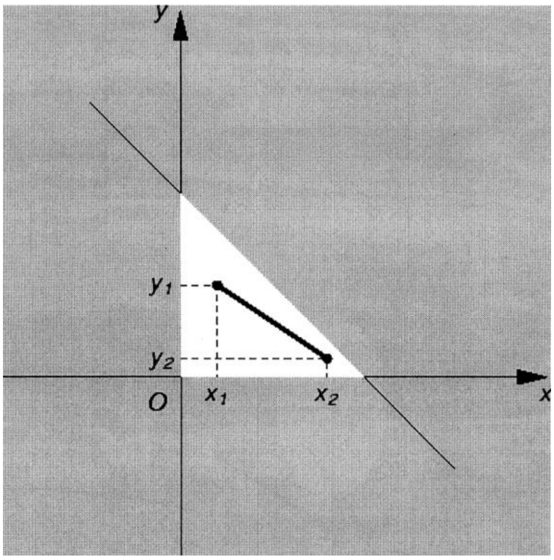
Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ zovemo **konveksnim** ako sadrži spojnicu svake dvije svoje točke.

Primjeri – konveksni skupovi

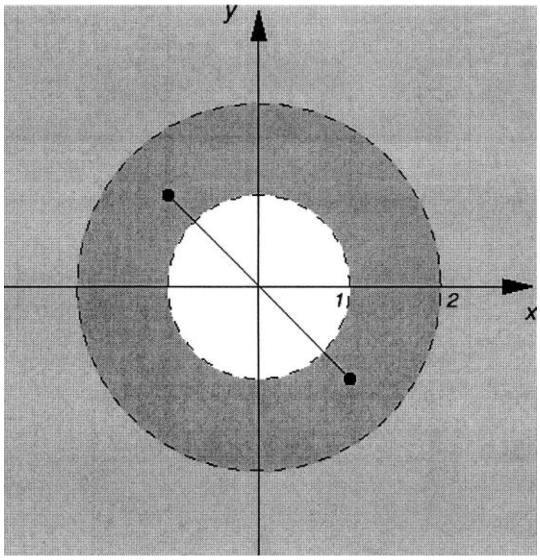
1. Skup $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ je konveksan skup (vidi sliku 1.1).

2. Skup $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ nije konveksan skup (vidi sliku 1.2).

Uočimo da npr. točke $(-1,1)$ i $(1,-1)$ pripadaju skupu S_2 ali da sve točke na njihovoj spojnici ne pripadaju skupu S_2. Konkretno točka $(0,0) \notin S_2$.



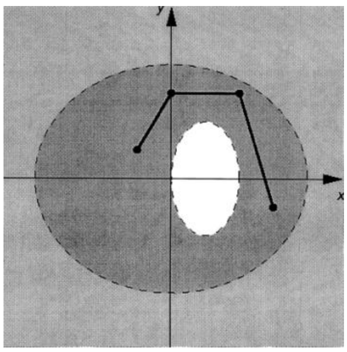
Slika 1.1



Slika 1.2

Definicija 7

- Otvoren skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je **povezan** ako se bilo koje dvije njegove točke mogu spojiti s konačno mnogo spojnica (vidi sliku 2).
- Otvoren i povezan skup naziva se **područje**.



Slika 2

Primjer

Primijetimo da je skup

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

otvoren i povezan (vidi sliku 1.2).

Primjenom definicije 7 zaključujemo da je skup S_2 područje.

Neprekidnost funkcije

Definicija

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren neprazan skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $P_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ proizvoljna točka u Ω. Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da je **neprekidna funkcija** u toči $P_0 \in \Omega$ ako

za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku točku $P = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \Omega$ vrijedi:

$$d\left(P_0, P\right) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(P\right) - f\left(P_0\right)\right| < \varepsilon . \tag{11}$$

Napomena:

Ako je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^2$, onda koristimo uobičajene oznake za točke: $P_0 = \left(x_0, y_0\right) \in \Omega$ i $P = \left(x, y\right) \in \Omega$, stoga se formula (11) zapisuje u obliku:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 < \delta^2 \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(x, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)\right| < \varepsilon . \tag{11.1}$$

Analogno, ako je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^3$, onda se formula (11) zapisuje u obliku:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2 < \delta^2 \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(x, y, z\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)\right| < \varepsilon , \tag{11.2}$$

gdje je je $P_0 = \left(x_0, y_0, z_0\right) \in \Omega$ i $P = \left(x, y, z\right) \in \Omega$.

✐ Uočimo da u slučaju kada je $\Omega = I = \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ proizlazi da se formula (12) zapisuje u obliku:

$$\left|x - x_0\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right| < \varepsilon , \tag{11.3}$$

gdje je $P_0 = x_0 \in \Omega$ i $P = x \in \Omega$. Pritom se podrazumijeva da formulama (11.1), (11.2) i (11.3) prethodi uvjet za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi jedna od navedenih formula. Jasno, izbor formule ovisi o dimenziji prostora u kojemu se promatra (tj. definira) neprekidnost funkcije.

Dakle, definicija neprekidnosti realne funkcije n realnih varijabli je zapravo analogna definiciji neprekidnosti realne funkcije realne varijable. Zbog toga su svojstva pa i dokazi teorema neprekidnih funkcija u točki ista bez obzira da li se radi o $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ili prostoru $\mathbb{R}^n$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$ (otvoren neprazan skup u $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$) i neka je zadana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tada kažemo:

- funkcija f je **neprekidna na skupu** $S \subseteq \Omega$ ako je ona neprekidna u svakoj točki skupa *S*;
- funkcija f je **klase** C (ponekad se piše C^0) na Ω ako je ona neprekidna na Ω (tj. ako je ona neprekidna u svakoj točki iz Ω), pritom skup svih funkcija klase C na Ω (tj. skup svih neprekidnih funkcija na Ω) označavamo s $C\left(\Omega\right)$;
- ako funkcija f nije neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$, onda kažemo da funkcija f **ima prekid u** točki P_0.

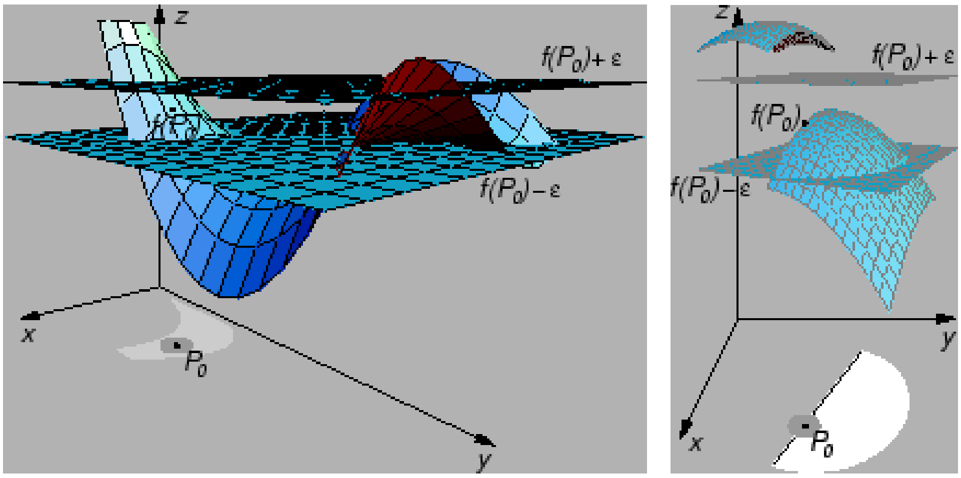
Na sljedećim slikama se vidi tipično ponašanje funkcije u okolini točke neprekidnosti i točke prekida. Svjetlo osjenčani skup u *xy*-ravnini je ortogonalna projekcija onog dijela grafa funkcije f koji se nalazi između ravnina $z = f\left(P_0\right) - \varepsilon$ i $z = f\left(P_0\right) + \varepsilon$. Dakle, ako je točka *P* iz tog skupa, onda vrijedi

$$f\left(P_0\right) - \varepsilon < f\left(P\right) < f\left(P_0\right) + \varepsilon$$

odnosno

$$\left|f\left(P\right) - f\left(P_0\right)\right| < \varepsilon .$$

Na slici 3 tamnije osjenčani skup je krug polumjera δ oko točke P_0. Na lijevom dijelu slike se vidi da se za odabrani ε može naći $\delta > 0$ takav da krug oko točke P_0 s polumjerom δ leži u svjetlije osjenčanom skupu. S druge strane, na desnom dijelu slike 3 nije moguće naći takav δ. Ma kako malen krug izabrali, uvijek ima točaka u njemu koje su izvan svjetlije osjenčanog skupa. U tim točkama vrijednost funkcije se više ne nalazi između ravnina. Pri tom valja naglasiti da se to događa za svaki $\varepsilon > 0$.



Slika 3: Ponašanje funkcije u okolini točke neprekidnosti i točke prekida

Primjeri neprekidnih funkcija

1. Konstanta je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^n$, tj. funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, $c = konst.$ je neprekidna u svakoj točki u $\mathbb{R}^n$.

Rješenje: Neka je $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljna točka i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada je:

$$\left| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \right| = |c - c| = 0 < \varepsilon .$$

Ova je nejednakost ispunjena za svaku točku $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, stoga za bilo koji $\delta > 0$ vrijedi:

$$d(P_0, P) < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$$

što povlači da je funkcija f neprekidna u točki $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Budući da je točka P_0 uzeta proizvoljno, slijedi da je funkcija f neprekidna u svakoj točki u $\mathbb{R}^n$. Time smo dokazali da je konstanta neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^n$.

2. Projekcije $(x, y) \mapsto x$ i $(x, y) \mapsto y$ su neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^2$.

Rješenje: Dokažimo prvi dio tvrdnje da je funkcija $f(x, y) = x$ neprekidna funkcija u svakoj točki u $\mathbb{R}^2$. Neka je $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna točka i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada je:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon .$$

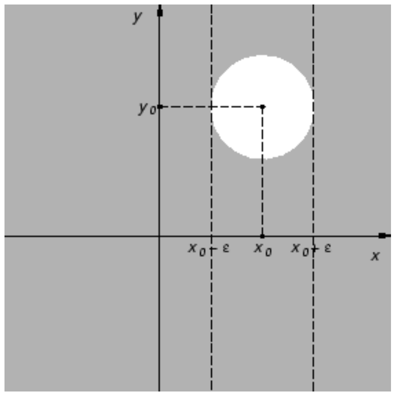
Uzmimo $\delta > 0$ takav da je $\delta \le \varepsilon$ (vidi sliku). Tada iz

$$|x - x_0| \le d((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

slijedi:
$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \delta \le \varepsilon$$

što povlači da je funkcija f neprekidna u točki $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Budući da je točka P_0 uzeta proizvoljno, slijedi da je funkcija f neprekidna u svakoj točki u $\mathbb{R}^2$. Time smo dokazali da je projekcija $(x, y) \mapsto x$ neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^2$.

Analogno se dokazuje da je projekcija $(x, y) \mapsto y$ neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^2$.



Mogući δ za izabrani ε.

Svojstva neprekidnih funkcija

Teorem 1

Neka je f realna funkcija definirana na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je g realna funkcija definirana na otvorenom skupu $\Omega' \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži sliku $f(\Omega)$ funkcije f (odnosno: $f(\Omega) \subseteq \Omega'$) tako da je kompozicija $h = g \circ f$ definirana na Ω.
Neka je f neprekidna funkcija u toči $P_0 \in \Omega$ i neka je g neprekidna funkcija u točki $t_0 = f(P_0)$.
Tada je kompozicija $h = g \circ f$ neprekidna funkcija u toči $P_0 \in \Omega$.

Dokaz:

Za dani $\varepsilon > 0$ iz neprekidnosti funkcije g u točki $t_0 = f(P_0)$ slijedi da postoji realan broj $\delta_0 > 0$ takav da je interval $\langle t_0 - \delta_0,\ t_0 + \delta_0 \rangle \subseteq \Omega'$ sadržan u Ω' i da:

$$|t - t_0| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |g(t) - g(t_0)| < \varepsilon \tag{12.1}$$

vidi formulu (11.3). Nadalje, iz neprekidnosti funkcije f u točki $P_0 \in \Omega$ za dobiveni realan broj $\delta_0 > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je otvorena kugla polumjera δ sa središtem u točki P_0 sadržana u otvorenom skupu Ω:

$$K(P_0; \delta) \subseteq \Omega$$

i vrijedi:

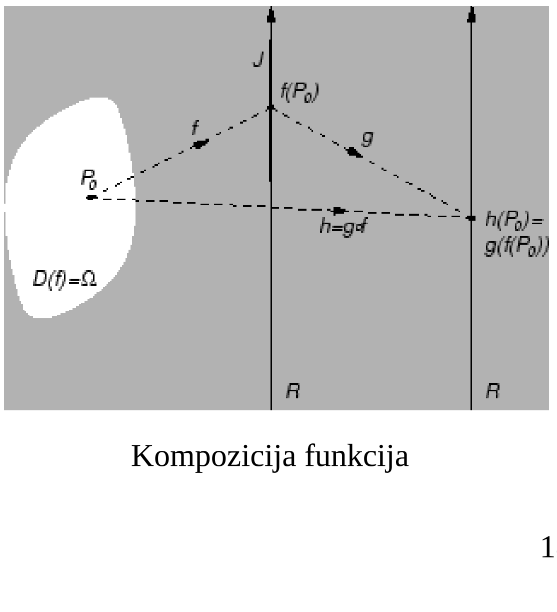
$$d(P_0, P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \delta_0. \tag{12.2}$$

Stavimo li $t = f(P)$, onda iz (12.2) i početnog uvjeta $t_0 = f(P_0)$ proizlazi da se $|f(P) - f(P_0)| < \delta_0$ može pisati u obliku: $|t - t_0| < \delta_0$, stoga (12.1) povlači:
$|g(t) - g(t_0)| < \varepsilon$, odnosno: $|g(f(P)) - g(f(P_0))| < \varepsilon$ ili: $|h(P) - h(P_0)| < \varepsilon$,
pri čemu se koristila kompozicija $h = g \circ f$ funkcija f i g koja je po pretpostavci teorema definirana na otvorenom skupu Ω. Jasno, iz: $h(x) = (g \circ f)(x)$ proizlazi: $h(x) = g(f(x))$.
Dakle, dobili smo

$$d(P_0, P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |h(P) - h(P_0)| < \varepsilon$$

te iz proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi da kompozicija $h = g \circ f$ neprekidna funkcija u toči $P_0 \in \Omega$.

Teoremom 1 pokazuje se da je kompozicija neprekidnih funkcija također neprekidna funkcija.



Kompozicija funkcija

Lema 2

Ako je $f:\Omega\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki P_0 otvorenog skupa $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, onda je funkcija f ograničena na nekoj kružnoj okolini točke P_0, tj. postoje brojevi $\eta>0$ i $M>0$ takvi da za svaku točku $P\in\Omega$ vrijedi: $\qquad d(P_0,P)<\eta \quad\Rightarrow\quad |f(P)|<M$.

Dokaz:

Neka je $\varepsilon=1$. Tada zbog pretpostavke leme da je funkcija f neprekidna u točki $P_0\in\Omega$ proizlazi da postoji realan broj $\eta>0$ takav da vrijedi: $\quad d(P_0,P)<\eta \quad\Rightarrow\quad |f(P)-f(P_0)|<\varepsilon\,(=1)$.
Nadalje, primjenom svojstva nejednakosti trokuta:

$$|f(P)|=|f(P)-f(P_0)+f(P_0)|\le\underbrace{|f(P)-f(P_0)|}_{<1}+|f(P_0)|$$

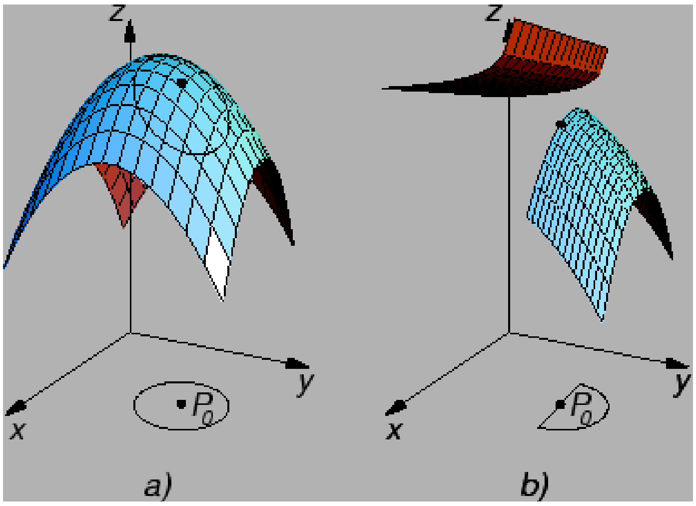
dobivamo: $|f(P)|<\underbrace{1+|f(P_0)|}_{=M}$, odnosno $|f(P)|<M$, što je i trebalo dokazati.

➢ Na slici 4 lijevo nalazi se graf neprekidne realne funkcije dviju realnih varijabli, a desno graf realne funkcije dviju realnih varijabli koja ima prekid u točkama za koje je $y=y_0$. Pri tom taj prekid je takav da

$$f(x_0,y)\to\infty \text{ kad } y\to y_0$$

preko vrijednosti manjih od y_0.

To znači da ne postoji krug K oko točke P_0 takav da bude $f(x,y)\le M$ za svaki $(x,y)\in K$ ma kako veliki M uzeli.



Slika 4: a) Neprekidna funkcija je lokalno ograničena
b) U okolini točke prekida funkcija ne mora biti ograničena.

Lema 3

Ako je $f:\Omega\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki P_0 otvorenog skupa $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ i ako je $f(P_0)\ne 0$, onda postoji $\delta>0$ takav da za svaku točku $P\in\Omega$ vrijedi:

$$(i)\qquad d(P_0,P)<\delta \quad\Rightarrow\quad f(P)>\frac{1}{2}f(P_0) \qquad \text{ako je}\quad f(P_0)>0,$$

$$(ii)\qquad d(P_0,P)<\delta \quad\Rightarrow\quad f(P)<\frac{1}{2}f(P_0) \qquad \text{ako je}\quad f(P_0)<0.$$

Dokaz:

Neka je $f(P_0)>0$. Tada zbog pretpostavke leme da je funkcija f neprekidna u točki $P_0\in\Omega$ proizlazi da za broj $\varepsilon=\frac{1}{2}f(P_0)$ postoji $\delta>0$ takav da je:

$$d(P_0,P)<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(P)-f(P_0)|<\varepsilon\left(=\frac{1}{2}f(P_0)\right).$$

Nadalje, primjenom svojstva: $\quad f(P_0)=f(P_0)-f(P)+f(P)\le\underbrace{|f(P_0)-f(P)|}_{<\varepsilon}+f(P)$

dobivamo: $f(P) > f(P_0) - \varepsilon$, odakle za $\varepsilon = \frac{1}{2} f(P_0)$ i $f(P_0) > 0$ proizlazi: $f(\mathrm{P}) > \frac{1}{2} f(\mathrm{P}_0)$. Analogno se dokazuje za $f(\mathrm{P}_0) < 0$.

Teorem 4

Neka su $f : \Omega \to \mathbb{R}$ i $g : \Omega \to \mathbb{R}$ dvije realne neprekidne funkcije u točki P_0 otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada vrijedi sljedeće tvrdnje:

(1) funkcija $P \mapsto \lambda f(P)$ je neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$;

(2) funkcija $P \mapsto f(P) \pm g(P)$ je neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$;

(3) funkcija $P \mapsto f(P) \cdot g(P)$ je neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$;

(4) funkcija $P \mapsto \dfrac{f(P)}{g(P)}$ $\left(g(P) \neq 0 \text{ za svaki } P \in \Omega\right)$ je neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$;

(5) funkcija $P \mapsto |f(P)|$ je neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$;

Dokaz:

(1) Iz pretpostavke da je f neprekidna funkcija u točki $P_0 \in \Omega$ proizlazi da za dani $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je: $d(P_0, P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ za svaki $\lambda \neq 0$.

Odavde za svaku točku $P \in K(P_0;\delta) \subseteq \Omega$ dobivamo:

$$|\lambda f(P) - \lambda f(P_0)| = |\lambda(f(P) - f(P_0))| = \lambda |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Budući da $d(P_0, P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\lambda f(P) - \lambda f(P_0)| < \varepsilon$,
zaključujemo da je funkcija $P \mapsto \lambda f(P)$ neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$.

(2) Iz pretpostavke da su f i g neprekidne funkcije u točki $P_0 \in \Omega$ proizlazi da za dani $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je: $d(P_0, P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |g(P) - g(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Odavde za svaku točku $P \in K(P_0;\delta) \subseteq \Omega$ dobivamo:

$$|(f+g)(P) - (f+g)(P_0)| = |f(P) + g(P) - f(P_0) - g(P_0)| \leq \underbrace{|f(P) - f(P_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(P) - g(P_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Budući da $d(P_0, P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |(f+g)(P) - (f+g)(P_0)| < \varepsilon$,
zaključujemo da je funkcija $P \mapsto f(P) + g(P)$ neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$.
Analogno se dokazuje da je funkcija $P \mapsto f(P) - g(P)$ neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$.

(3) Neka je $\varepsilon > 0$. Tada primjenom leme 2 postoje brojevi $\eta > 0$ i $M > 0$ takvi da:

$$d(P_0, P) < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(P)| < M \quad \wedge \quad |g(P)| < M.$$

Nadalje, iz pretpostavke da su f i g neprekidne funkcije u točki $P_0 \in \Omega$ proizlazi da za realni broj $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2M}$ postoji realan broj $\delta \in \langle 0, \eta \rangle$ takav da je:

$$d(P_0, P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon_0 \quad \wedge \quad |g(P) - g(P_0)| < \varepsilon_0,$$

stoga za svaku točku $P \in K(P_0;\delta) \subseteq \Omega$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\left|(f\cdot g)(P)-(f\cdot g)(P_0)\right| &= \left|f(P)\cdot g(P)-f(P_0)\cdot g(P_0)\right| \\ &= \left|f(P)\cdot g(P)-f(P)\cdot g(P_0)+f(P)\cdot g(P_0)-f(P_0)\cdot g(P_0)\right| \\ &= \left|f(P)\big(g(P)-g(P_0)\big)+g(P_0)\big(f(P)-f(P_0)\big)\right| \\ &\le \left|f(P)\right|\cdot\left|\big(g(P)-g(P_0)\big)\right|+\left|g(P_0)\right|\cdot\left|\big(f(P)-f(P_0)\big)\right| \\ &< M\cdot\varepsilon_0+M\cdot\varepsilon_0=2M\cdot\varepsilon_0=2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Dakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ dobili smo da vrijedi

$$d(P_0,P)<\delta \qquad \Rightarrow \qquad \left|(f\cdot g)(P)-(f\cdot g)(P_0)\right|<\varepsilon\,,$$

što povlači neprekidnost funkcije $P \mapsto f(P)\cdot g(P)$ u točki $P_0 \in \Omega$.

(4) Za realnu funkciju realne varijable (kolegij: Matematika 1) dokazano je da je funkcija $\varphi(t)=\frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ neprekidna za svaki $t \neq 0$. Primjenom Teorema 1 (kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija) uz uvjet $g(P) \neq 0$ za svaki $P \in \Omega$ dobivamo da je funkcija

$$P \mapsto (\varphi\circ g)(P)=\varphi\big(g(P)\big)=\frac{1}{g(P)}, \quad \big(g(P)\neq 0 \text{ za svaki } P\in\Omega\big)$$

neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$. Nadalje, primjenom svojstva (3) (tj. produkt neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija) proizlazi da je funkcija

$$P \mapsto f(P)\cdot\frac{1}{g(P)}=\frac{f(P)}{g(P)}, \quad \big(g(P)\neq 0 \text{ za svaki } P\in\Omega\big)$$

neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$ za svaki $P \in \Omega$ za koji je $g(P) \neq 0$.

(5) Koristeći svojstvo realne funkcije realne varijable (kolegij: Matematika 1) da je funkcija $\varphi(t)=|t|$ neprekidna za svaki $t \in \mathbb{R}$ i primjenom Teorema 1 (kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija) proizlazi da je funkcija

$$P \mapsto (\varphi\circ f)(P)=\varphi\big(f(P)\big)=\left|f(P)\right|$$

neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$.

Korolar 5

Zbrajanje, oduzimanje i množenje realnih brojeva su neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^2$.

Dijeljenje $(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$ realnih brojeva definirano je i neprekidno na otorenom skupu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0\}$.

Korolar 6

Svaki polinom $p:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^n$.

Korolar 7

Svaka racionalna funkcija je neprekidna funkcija na svom prirodnom području definicije (tj. na svojoj prirodnoj domeni).

Limes funkcije

Limes funkcije od dvije, tri, odnosno n varijabli uvodi se na isti način kao i limes funkcije jedne varijable.

Definicija

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren neprazan skup, neka je $P_0 \in \Omega$ dana točka iz Ω i neka je f realna funkcija definirana na Ω, osim možda u točki P_0. Za realan broj L kažemo da je **limes funkcije** f u toči $P_0 \in \Omega$ ako

za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku točku $P \in \Omega$ vrijedi:

$$0 < d(P_0, P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(P) - L| < \varepsilon \tag{13}$$

i pišemo $\quad L = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) \quad$ ili $\quad f(P) \to L \quad$ kada $\quad P \to P_0$

te kažemo da $f(P)$ konvergira prema realnom broju L kada točka P teži prema točki P_0. Pritom se točka P približava prema točki P_0 po bilo kojoj stazi.
Uočimo da takvih staza ima beskonačno mnogo, npr. To mogu biti svi smjerovi pravaca ili parabola ili nekih drugih krivulja koje prolaze točkom P_0.

VAŽNO:

Ako je funkcija f neprekidna u točki P_0, onda ona ima limes $L = f(P_0)$ koji je jednak $f(P_0)$, tj. **vrijednosti funkcije f u točki P_0.**
Obrat ne vrijedi, naime ako funkcija ima limes u točki $P_0 \in \Omega$, onda ona nužno ne mora biti neprekidna u točki P_0.

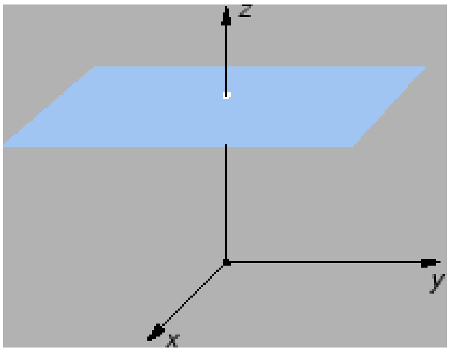
Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$ ako i samo ako je $\boxed{L = f(P_0)}$.

Primjeri

1. Neka je zadana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ formulom:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(koja je prikazana slikom 5).



Slika 5

Primijetimo da je zadana funkcija f definirana u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava ravnine, tj. u točki $P_0 = (0,0)$. Funkcija f ima vrijednost jednaku 1 u svakoj točki osim u ishodištu, gdje je njezina vrijednost jednaka nuli, odnosno $f(P_0) = f(0,0) = 0$. S druge strane, imamo: $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$, stoga u ishodištu postoji limes funkcije f i on je jednak 1, tj. $L = 1$. Uočimo da je dobivena vrijednost limesa $L \neq f(0,0) = 0$, što povlači da zadana funkcija f ima prekid u točki $P_0 = (0,0)$ (tj. ishodištu).

2. Neka je zadana funkcija: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$, tj. $(x,y)\neq(0,0)$.

Uočimo da je zadana funkcija definirana na skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (u svakoj točki ravnine $\mathbb{R}^2$ osim u ishodištu). Pretpostavimo da se točki $P_0=(0,0)$ (tj. ishodištu) približavamo po pravcu $y=ax$.

Tada dobivamo: $$f(x,ax)=\frac{ax^2}{x^2+a^2x^2}=\frac{ax^2}{x^2(1+a^2)}=\frac{a}{1+a^2}$$

odnosno: $$\boxed{L=\lim_{x\to 0}f(x,ax)=\frac{a}{1+a^2}},$$

stoga je $f(x,ax)=L$.

Međutim limes L funkcije f nije jednoznačan, jer ovisi o smjeru, stoga zaključujemo da zadana funkcija <u>nema limes</u> u točki $P_0=(0,0)$.

Konkretno dobivamo: $L=0$ za $a=0$; $L=\dfrac{1}{2}$ za $a=1$; $L=\dfrac{2}{5}$ za $a=2$, itd.

3. Primijetimo da je limes $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)}\arcsin\frac{2x-4y-4}{x^2+y^2}=0$, $(x,y)\neq(0,0)$

jednak vrijednosti funkcije $f(x,y)=\arcsin\dfrac{2x-4y-4}{x^2+y^2}$ u točki $P_0=(2,0)$. Naime, funkcija $f(x,y)=\arcsin\dfrac{2x-4y-4}{x^2+y^2}$ je neprekidna u točki $(2,0)$ pa se zadani limes L izračunava jednostavnim uvrštavanjem koordinata točke $P_0=(2,0)$ u danu funkciju $f(x,y)=\arcsin\dfrac{2x-4y-4}{x^2+y^2}$. Time dobivamo:

$$L=f(2,0)=\arcsin\frac{0}{4}=\arcsin 0=0.$$

Svojstva limesa

- Ako postoji $\displaystyle\lim_{P\to P_0}f(P)$, onda je on jedinstven.

Teorem 8

Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ otvoren neprazan skup. Neka je $P_0\in\Omega$ proizvoljna točka iz Ω i neka su f i g dvije realne funkcije definirane na Ω, osim možda u točki P_0. Pretpostavimo da f i g imaju limes u točki P_0. Tada svaka od funkcija

1) $P\mapsto\lambda f(P)$;

2) $P\mapsto f(P)\pm g(P)$;

3) $P\mapsto f(P)\cdot g(P)$;

4) $P\mapsto\dfrac{f(P)}{g(P)}$ $\left(g(P)\neq 0 \text{ za svaki } P\in\Omega\setminus\{P_0\}\right)$;

5) $P\mapsto|f(P)|$;

ima limes u točki $P_0\in\Omega$ koji je redom dan sa:

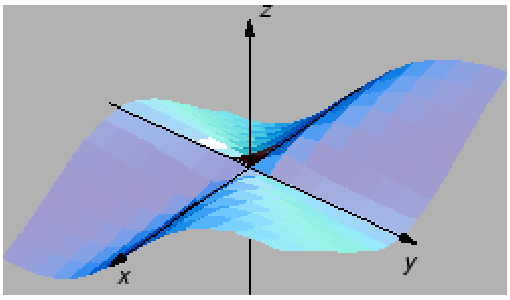
1) $\lim\limits_{P\to P_0}\left(\lambda f(P)\right)=\lambda\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$;

2) $\lim\limits_{P\to P_0}\left(f(P)\pm g(P)\right)=\lim\limits_{P\to P_0} f(P)\pm\lim\limits_{P\to P_0} g(P)$;

3) $\lim\limits_{P\to P_0}\left(f(P)\cdot g(P)\right)=\lim\limits_{P\to P_0} f(P)\cdot\lim\limits_{P\to P_0} g(P)$;

4) $\lim\limits_{P\to P_0}\left(\dfrac{f(P)}{g(P)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{P\to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P\to P_0} g(P)}$ $\left(g(P)\neq 0 \text{ za svaki } P\in\Omega\setminus\{P_0\} \ i \ \lim\limits_{P\to P_0} g(P)\neq 0\right)$;

5) $\lim\limits_{P\to P_0}\left|f(P)\right|=\left|\lim\limits_{P\to P_0} f(P)\right|$.



Primjeri

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

Primijetimo da vrijedi: $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=0$

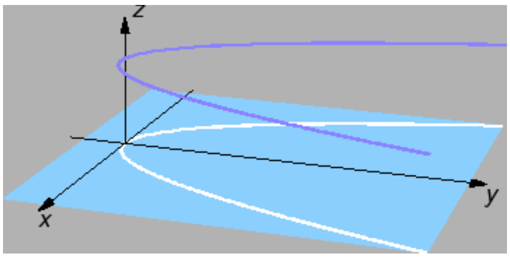
ali isto tako ako stavimo $y=kx$, onda imamo da točka $(x,y)\to(0,0)$ ako $x\to 0$, stoga imamo da je:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^2+k^2x^2}=\frac{kx^3}{x^2\left(1+k^2\right)}=\frac{kx}{1+k^2}=0\,.$$

Time smo pokazali da limesi po svim pravcima (koji prolaze ishodištem) postoje i oni su jednaki nuli. Međutim to nam još uvijek ne mora garantirati postojanje limesa.
Konkretno, u sljedećem primjeru pokazati ćemo da limesi po svim pravcima postoje i da su jednaki, ali da limes ipak ne postoji.

2. Neka je zadana funkcija: $f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{ako je } y=x^2\\ 0 & \text{inače}\end{cases}$

Graf te funkcije je dan na sljedećoj slici.



Primijetimo, ako se ishodištu približavamo po svakom pravcu $y=kx$, $k\in\mathbb{R}$, $(k=konst.)$, onda je limes u točki $(0,0)$ jednak nuli. S druge strane, ako se ishodištu približavamo po krivulji (paraboli) $y=x^2$, onda je vrijednost funkcije stalno jednaka 1 pa je i limes jednak 1.
Na osnovu nejednoznačnosti limesa zaključujemo da zadana funkcija nema limes.

❖ Ovi primjeri pokazuju da traženje limesa funkcije više varijabli nije lagan posao te da se ne smije zaključivati egzistencija limesa na osnovi egzistencije sukcesivnih limesa ili limesa po određenim putevima (smjerovima).

❖ Za određivanje egzistencije limesa funkcija od dviju varijabli koristi se najčešće jedna jednostavna metoda, kojom se uvodi zamjena varijabli x i y tako da se točka u kojoj se traži limes shvaća kao pol polarnog koordinatnog sustava u ravnini. Nakon toga dovoljno je zahtijevati da r teži prema nuli.

3. Odredite vrijednost sljedećeg limesa: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Uvođenjem zamjene: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ imamo da $(x,y)\to(0,0)$ ako $r\to 0$, stoga dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)}{r^2\underbrace{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}_{=1}} \\
&= \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right) = 0 .
\end{aligned}$$

Dakle dobili smo da je: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

4. Odredite vrijednost sljedećeg limesa: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{1-4x+x^2+6y-3y^2}{5-4x+x^2-2y+y^2}$.

Uvođenjem zamjene: $x = 2 + r\cos\varphi$, $y = 1 + r\sin\varphi$

imamo da $(x,y)\to(0,0)$ ako $r\to 0$, stoga dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{1-4x+x^2+6y-3y^2}{5-4x+x^2-2y+y^2} \\
&\quad= \lim_{r\to 0} \frac{1-8-4r\cos\varphi+4+4r\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi+6+6r\sin\varphi-3-6r\sin\varphi-3r^2\sin^2\varphi}{5-8-4r\cos\varphi+4+4r\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi-2-2r\sin\varphi+1+2r\sin\varphi+r^2\sin^2\varphi} \\
&\quad= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi-3r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi} \\
&\quad= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(\cos^2\varphi-3\sin^2\varphi\right)}{r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} \\
&\quad= \lim_{r\to 0}\left(\cos^2\varphi-3\sin^2\varphi\right) = \cos^2\varphi-3\sin^2\varphi .
\end{aligned}$$

Dakle dobili smo da je: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{1-4x+x^2+6y-3y^2}{5-4x+x^2-2y+y^2} = \cos^2\varphi-3\sin^2\varphi$.

Budući da za različite kuteve φ dobivamo različite vrijednosti limesa, zaključujemo da zadani limes ne postoji.

Parcijalne derivacije funkcije

Neka je $f:\Omega\to\mathbb{R}$ realna funkcija od dvije varijable definirana na otvorenom skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$.

❖ Podsjetimo se da je graf funkcije od dviju varijabli skup

$$\mathrm{M}=\{(x,y,f(x,y))\mid(x,y)\in\Omega\}$$

koji predstavlja neku dvodimenzionalnu plohu u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$. Često ćemo plohu M zadavati njenom eksplicitnom jednadžbom $z=f(x,y)$ i pisati kraće: M … $z=f(x,y)$.

Tada uz svaku točku $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0)\in\Omega$ razlikujemo dvije funkcije jedne varijable:

(i) $x\mapsto f(x,y_0),\quad\forall\ (x,y_0)\in\Omega$

(ii) $y\mapsto f(x_0,y),\quad\forall\ (x_0,y)\in\Omega$

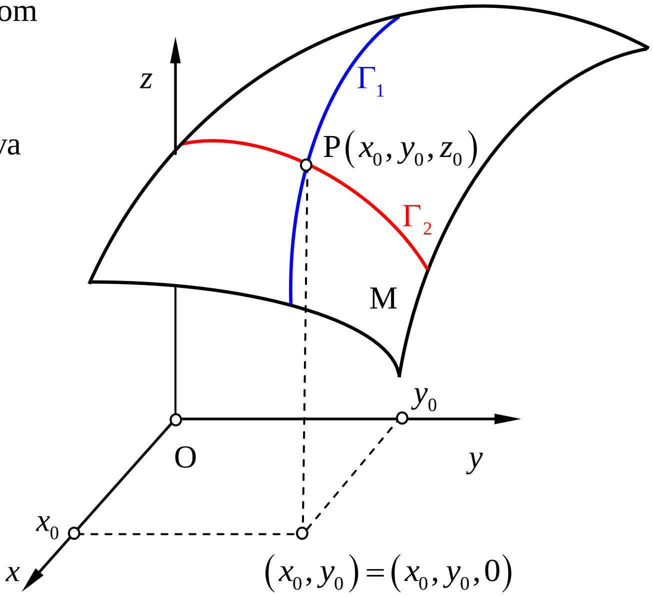
Uočimo:

(i) $y=y_0$ je ravnina paralelna sa xz – ravninom koja prolazi točkom $(0,y_0,0)$;

- presjekom ravnine $y=y_0$ i plohe M dobiva se krivulja Γ_1 na plohi M (graf funkcije $x\mapsto f(x,y_0)$ po varijabli *x*).

(ii) $x=x_0$ je ravnina paralelna sa yz – ravninom koja prolazi točkom $(x_0,0,0)$;

- presjekom ravnine $x=x_0$ i plohe M dobiva se krivulja Γ_2 na plohi M (graf funkcije $y\mapsto f(x_0,y)$ po varijabli *y*).



Ako je funkcija $x\mapsto f(x,y_0)$ diferencijabilna za $x=x_0$, tj. ako postoji limes

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

onda kažemo da funkcija f ima **parcijalnu derivaciju po varijabli** x (tj. po prvoj varijabli) **u točki** $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0)\in\Omega$ i pišemo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{14}$$

Ponekad se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ označava sa $\partial_1 f(x_0, y_0)$ ili sa $\mathrm{D}_1 f(x_0, y_0)$, pri čemu nam ∂_1, odnosno D_1 označavaju da se radi o parcijalnoj derivaciji po prvoj varijabli.

Analogno, ako je funkcija $y \mapsto f(x_0, y)$ diferencijabilna za $y = y_0$, tj. ako postoji limes

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

onda kažemo da funkcija f ima **parcijalnu derivaciju po varijabli** y (tj. po drugoj varijabli) **u točki** $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ i pišemo:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{15}$$

Ponekad se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ označava sa $\partial_2 f(x_0, y_0)$ ili sa $\mathrm{D}_2 f(x_0, y_0)$, pri čemu nam ∂_2, odnosno D_2 označavaju da se radi o parcijalnoj derivaciji po drugoj varijabli.

Napomena:

Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija od dvije varijable.

Pri izračunavanju $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \left(= \frac{\partial z}{\partial x} \right)$ (parcijalne derivacije funkcije od dvije varijable po prvoj varijabli) prva se varijabla x tretira kao varijabla, dok se druga varijabla y tretira kao konstanta. Analogno, pri izračunavanju $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \left(= \frac{\partial z}{\partial y} \right)$ (parcijalne derivacije funkcije od dvije varijable po drugoj varijabli) prva se varijabla x tretira kao konstanta, dok se druga varijabla y tretira kao varijabla. Time se formalno funkcija od dvije varijable derivira kao funkcija od jedne varijable (u prvom slučaju po varijabli x, a u drugom po varijabli y).

Primjer

Odredite parcijalne derivacije polinoma:

$$f(x, y) = 3x^3 + 2x^2 y - x^2 - y + 1 \qquad \text{u točki } \mathrm{P}_0 = (1, -3).$$

Imamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + 4xy - 2x \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 1$$

stoga je:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-3) = 9x^2 + 4xy - 2x\,|_{(1,-3)} = 9 - 12 - 2 = -5,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-3) = 2x^2 - 1\,|_{(1,-3)} = 2 - 1 = 1.$$

- Općenito, neka je $f:\Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija od n varijabli definirana na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ i neka je $\mathrm{P}_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{\mathrm{n}}^0\right)$ neka fiksna točka u Ω.

  Pretpostavimo da je $x_i \mapsto f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_{\mathrm{n}}^0\right)$ diferencijabilna za $x_i = x_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$. Tada kažemo da je realan broj

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{\mathrm{n}}^0\right) = \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_{\mathrm{n}}^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_{\mathrm{n}}^0\right)}{x_i - x_i^0} \quad (16)$$

  parcijalna derivacija funkcije f **po** $i-$toj **varijabli** x_i $\left(i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}\right)$ **u točki** $\mathrm{P}_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{\mathrm{n}}^0\right) \in \Omega$.

Dakle, bilo koja parcijalna derivacija funkcije od n varijabli računa se tako da se varijabla po kojoj se parcijalno derivira shvati kao varijabla, a sve preostale kao konstante. Time zadanu funkciju od n varijabli deriviramo formalno kao da je funkcija od jedne varijable s više parametara (konstanti).
Iz rečenog proizlazi da su svojstva parcijalnih derivacija analogna svojstima derivacije funkcije od jedne verijable (vidi derivaciju zbroja, razlike, umnoška, kvocjenta,…).

Definicija

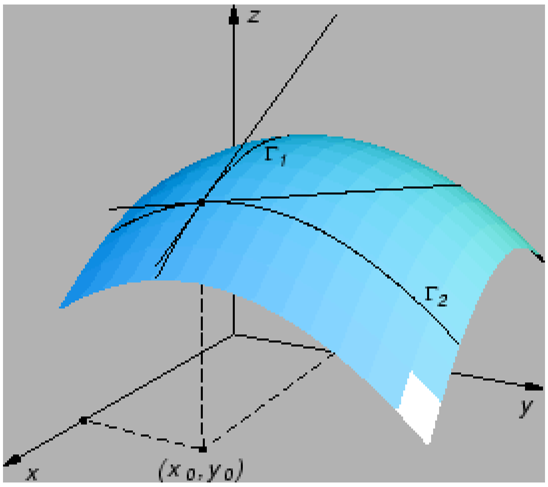
Za funkciju $f:\Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da je **klase** C^1 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, ako je ona neprekidna na Ω i ako sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}\right)$ funkcije f postoje na Ω i neprekidne su na Ω.

- Sa $C^1(\Omega)$ označavamo skup svih funkcija $f:\Omega \to \mathbb{R}$ koje su klase C^1 na Ω.

Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija.

Podsjetimo se, graf funkcije $x \mapsto f(x, y_0)$ je krivulja Γ_1 koja se dobiva kad se ploha $M \ldots z = f(x,y)$ presiječe ravninom $y = y_0$, stoga je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ koeficijent smjera tangente na krivulju Γ_1 u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$.

Analogno, graf funkcije $y \mapsto f(x_0, y)$ je krivulja Γ_2 koja se dobiva kad se ploha $M \ldots z = f(x,y)$ presiječe ravninom $x = x_0$, stoga je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ koeficijent smjera tangente na krivulju Γ_2 u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$.



Slika 6: Grafičko predočenje parcijalnih derivacija funkcije od dvije vaijable

Parcijalne derivacije višeg reda. Schwartzov teorem

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija od dvije varijable definirana na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ takva da funkcija f ima (dobro definirane) obje parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ u svakoj točki $(x,y) \in \Omega$. Uočimo da su parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ također funkcije od dvije varijable x i y, stoga možemo pisati:

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad h(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega.$$

Pritom su funkcije g i h (tj. $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$) definirane na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, stoga se i za njih mogu promatrati (ako postoje) parcijalne derivacije po varijabli x, odnosno po varijabli y.

Time dobivamo da je parcijalna derivacija funkcije g po varijabli x u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ (ako postoji) dana sa:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right](x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \tag{17}$$

gdje je:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

te da je parcijalna derivacija funkcije g po varijabli y u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ (ako postoji) dana sa:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right](x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \tag{18}$$

gdje je:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Analogno imamo da je parcijalna derivacija funkcije h po varijabli x u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ (ako postoji) dana sa:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \tag{19}$$

gdje je:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

te da je parcijalna derivacija funkcije h po varijabli y u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ (ako postoji) dana sa:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \tag{20}$$

gdje je:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Na taj način dobili smo četiri **parcijalne derivacije drugog reda funkcije** f.

U nastavku ćemo pokazati (vidi Schwarzov teorem) da vrijedi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, stoga zadana funkcija f ima samo tri derivacija drugog reda i to:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Na analogan se način uvode parcijalne derivacije trećeg, četvrtog, odnosno općenito n-tog reda funkcije f pri čemu vrijedi:

$$\left[\partial_i \left(\partial_j f\right)\right]\left(x_0, y_0\right) = \left[\partial_j \left(\partial_i f\right)\right]\left(x_0, y_0\right), \tag{21}$$

gdje: $\partial_i g = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ (označava parcijalnu derivaciju neke funkcije g po $i-$toj varijabli), odnosno

$\partial_j g = \dfrac{\partial g}{\partial x_j}$ (označava parcijalnu derivaciju neke funkcije g po $j-$toj varijabli).

Drugim rječima, ako neku funkciju deriviramo najprije po $j-$toj, a onda po $i-$toj varijabli, onda je rezultat tog deriviranja jednak kao da smo tu funkciju derivirali najprije po $i-$toj, a onda po $j-$toj varijabli.

Konkretno za $\mathrm{n}=3$ primjenom pravila (21) imamo da vrijedi:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

stoga dobivamo da funkcija f ima samo četiri derivacija trećeg reda:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

pri čemu je:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right).$$

Na opisani način dolazimo do parcijalnih derivacija n-tog reda, koje zbirno zovemo parcijalnim derivacijama višeg reda.

Schwartzov teorem

Teorem 9

Neka je $f:\Omega\to\mathbb{R}$ realna funkcija od dvije varijable definirana na otvorenom skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ takva da u svakoj točki $(x_0,y_0)\in\Omega$ postoje parcijalne derivacije (prvog i drugog reda)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x_0,y_0),\quad \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right](x_0,y_0)$$

funkcije f u svakoj točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0)\in\Omega$, pri čemu su $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ i $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ neprekidne na Ω.

Tada vrijedi:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x_0,y_0)=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right](x_0,y_0) \tag{22}$$

za svaku točku $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0)\in\Omega$.

Drugim riječima ako su parcijalne derivacije $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ i $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ drugog reda neprekidne na Ω, onda su one i jednake (tj. imaju jednaku vrijednost).

Napomenimo da postoje funkcije za koje postoje derivacije $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ i $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ na Ω (koje nisu neprekidne na Ω, tj. imaju prekid u nekoj ili nekim točkama) i za koje ne vrijedi identitet (22).

Definicija

Za funkciju $f:\Omega\to\mathbb{R}$ kažemo da je klase $C^{\mathrm{p}}(\Omega)$, $\mathrm{p}=2,3,4,\ldots$ na otvorenom skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ako sve njezine parcijalne derivacije p-tog reda postoje na Ω koje su ujedno neprekidne funkcije na Ω. Kažemo da je funkcija f klase $C^{\infty}(\Omega)$ ako ima parcijalne derivacije bilo kojeg reda i ako su one neprekidne na Ω.

Teorem srednje vrijednosti

Podsjetimo se najprije Langrangeovog teorema srednje vrijednosti za funkcije jedne varijable, na osnovu kojega ćemo izreći Langrangeov teorem srednje vrijednosti za realne funkcije od dvije varijable.

- Ako je $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ realna funkcija (jedne varijable) klase C^1 na segmentu $\mathrm{I} = [a,b]$ i ako su t_0 i $t_0 + h$ točke iz segmenta I, onda je:

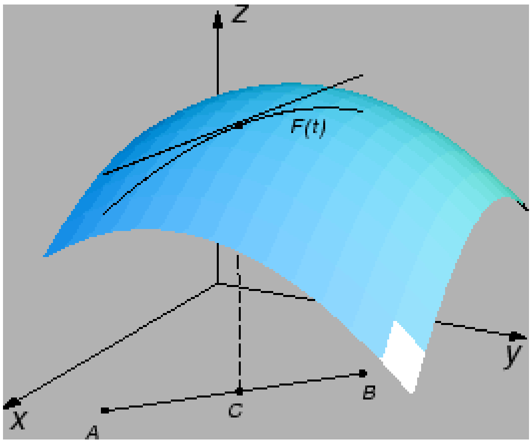
$$\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) = \varphi'(\xi) \cdot h, \qquad \text{gdje je} \quad t_0 < \xi < t_0 + h \tag{23}$$

Teorem 10

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren neprazan skup i neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija klase C^1 na Ω (tj. funkcija f i sve njene parcijalne derivacije prvog reda su neprekidne na otvorenom skupu Ω).
Neka su $\mathrm{A} = (x_0, y_0)$ i $\mathrm{B} = (x_0 + h, y_0 + k)$ dvije točke iz otvorenog skupa Ω takve da spojnica $\overline{\mathrm{AB}}$ (točaka A i B) leži u Ω. Tada postoji točka C na spojnici $\overline{\mathrm{AB}}$ takva da vrijedi:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(C) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(C). \tag{24}$$

Jasno, ako je točka C na spojnici $\overline{\mathrm{AB}}$, onda možemo pisati: $C = (x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta \cdot k)$, $0 < \theta < 1$.



Dokaz:

Sami – vidi: Kurepa, Matematička analiza III, str. 69.

Formulu (24) često pišemo u obliku:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(x-x_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+(y-y_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial y} \tag{25}$$

ako stavimo: $x=x_0+h$, $y=y_0+k$.

Formula (24), odnosno (25) poznata je pod nazivom **formula o konačnim prirastima funkcije** f.

Uočimo ako u formuli (24) h i k shvatimo kao priraste argumenata x i y, odnosno: $\Delta x=h$ i $\Delta y=k$, onda je lijeva strana formule (24) zapravo prirast funkcije f u točki $\mathrm{A}=(x_0,y_0)$, koji se često označava sa: $\Delta f(x_0,y_0)$, pri čemu je: $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

Time se dobiva da se formula (24) može pisati u obliku:

$$\Delta f(x_0,y_0)=\Delta x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Napomenimo da iz točke $\mathrm{A}=(x_0,y_0)$ možemo krenuti u raznim smjerovima i različito daleko uz uvjet da ne izlazimo iz otvorenog skupa Ω. To ostvarujemo proizvoljnim biranjem realnih brojeva h i k. Jasno, u svakom pojedinom slučaju (za neke konkretne fiksne realne brojeve h i k) dobiva se neka nova točka na odgovarajućoj spojnici $\overline{\mathrm{AB}}$. Pritom se javlja problem da ne znamo koju točku C treba uzeti na spojnici $\overline{\mathrm{AB}}$. Zato se umjesto formule (24) često koristi približna formula:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\approx h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \tag{26}$$

u kojoj se vrijednost parcijalnih derivacija prvog reda ne računa u točki C (na spojnici $\overline{\mathrm{AB}}$), već u polaznoj točki $\mathrm{A}=(x_0,y_0)$. Formulu (26) zovemo **formula konačnih prirasta**, a koristi se za približno računanje.

Napomena:

U suglasnosti sa formulom (25) imamo da se formula (26) može također pisati u obliku:

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+(x-x_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0). \tag{27}$$

Derivacija (diferencijal) funkcije.

Postojanje parcijalnih derivacija nije osobito jak zahtjev na funkciju, jer postojanje parcijalnih derivacija ne osigurava neprekidnost funkcije od dviju (ili više varijabli).

Taj se problem rješava sljedećom definicijom, pri čemu se uvodi pojam derivacije i derivabilnosti funkcije.

Definicija

Kažemo da je funkcija f **derivabilna (diferencijabilna) u točki** (x_0, y_0) ako postoji polinom prvog stupnja $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$P(t,s) = A\cdot t + B\cdot s \tag{28}$$

takav da je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - P(h,k)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Polinom P se zove **derivacija (ili diferencijal) funkcije** f **u točki** (x_0, y_0) i označava se sa:

$$P = df(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0).$$

Teorem 11

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren neprazan skup i neka je $f:\Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$. Tada je funkcija f neprekidna u točki P_0.

Teorem 12

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren neprazan skup. Neka je $f:\Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ i neka je

$$f'(x_0, y_0)(t,s) = A\cdot t + B\cdot s.$$

Tada postoje parcijalne derivacije (prvog reda) funkcije f u točki (x_0, y_0) i vrijedi:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{29}$$

Ispitivati derivabilnost funkcije po definiciji nije jednostavno, jer treba računati odgovarajući limes. Zato se postavlja pitanje da li se derivabilnost može ustanoviti jednostavnije. Sljedeći teorem rješava to pitanje.

Napomena:

U suglasnosti sa oznakama (29) iz teorema 12 imamo da se polinom (28) može pisati u obliku:

$$P(t,s)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot t+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot s\left(=df(x_0,y_0)=f'(x_0,y_0)\right),$$

stoga je:

$$df(x_0,y_0)(t,s)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot t+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot s. \tag{30}$$

Teorem 13

Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ otvoren neprazan skup i neka funkcija $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ima neprekidne parcijalne derivacije (prvog reda) po varijabli x i po varijabli y na Ω. Tada je funkcija f derivabilna u svakoj točki otvorenog skupa Ω.

- Analogno gore navedenom definira se derivacija funkcije od tri varijable u točki (x_0,y_0,z_0), koja je u ovom slučaju polinom $P(t,s,u)$ prvog stupnja od tri varijable t, s, u, a označavamo ga sa: $f'(x_0,y_0,z_0)$ ili najčešće sa: $df(x_0,y_0,z_0)$.

  Dakle, uz uvjet da su parcijalne derivacije funkcije od tri varijable neprekidne u točki (x_0,y_0,z_0), vrijedi da je diferencijal funkcije f u točki (x_0,y_0,z_0) dan sa:

$$df(x_0,y_0,z_0)(t,s,u)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot t+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot s+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot u. \tag{31}$$

- Na sličan se način definira derivacija funkcije od n varijabli u točki $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, koja je u ovom slučaju polinom $P(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ prvog stupnja od n varijabli t_1, t_2, ..., t_n, a označavamo ga sa: $df(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ ili $f'(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$.

  Uz uvjet da su parcijalne derivacije funkcije od n varijabli neprekidne u točki $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ imamo da diferencijal (derivacija) funkcije f u točki $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ dan sa:

$$df(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)(t_1,t_2,\ldots,t_n)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\cdot t_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\cdot t_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\cdot t_n$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\cdot t_j$$

Tangencijalna ravnina i normala na plohu M u prostoru $\mathbb{R}^3$

Definicija

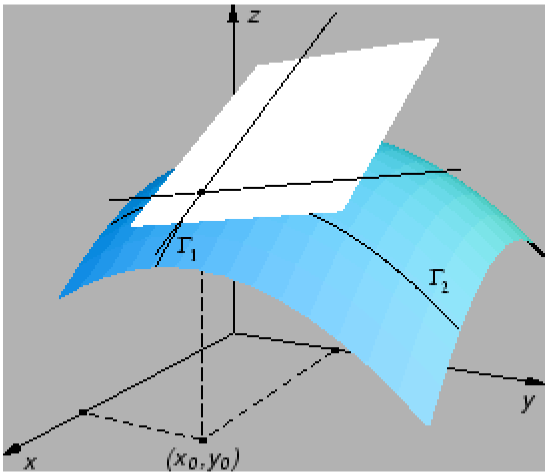
Neka je funkcija $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ derivabilna u točki (x_0, y_0).

Graf polinoma prvog stupnja

$$t(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0). \tag{32}$$

se zove **tangencijalna ravnina na graf funkcije** f (tj. tangencijalna ravnina na plohu M) **u točki** (x_0, y_0).

Pravac kroz točku (x_0, y_0) okomit na tangencijalnu ravninu zovemo **normala na graf funkcije** f (tj. normala na plohu M) **u točki** (x_0, y_0).



Neka je ploha M zadana eksplicitnom jednadžbom: $\boxed{\mathrm{M} \ \dots \quad z = f(x,y)}$.

Iz dane definicije proizlazi da je jednadžba tangencijalne ravnine π na plohu M u točki $\mathrm{P} = (x_0, y_0)$ dana sa:

$$\pi \quad \dots \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0) - (z-z_0) = 0. \tag{33}$$

Kanonske jednadžbe normale na plohu $\mathrm{M} \ \dots \ z = f(x,y)$ u točki $\mathrm{P} = (x_0, y_0)$ dane su sa:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{34}$$

✓ Uočimo da je točki $\mathrm{P} = (x_0, y_0) \in \Omega$ (u području definicije funkcije f) pridružena točka $\mathrm{T} = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ na plohi M, gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Primjer

Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine i jednadžbu normale na plohu $\mathrm{M} \ \dots \ z = x^2 y$ u točki $(2,1)$.

Rješenje. Primijetimo da je:

$$z_0 = x_0^2 y_0 \,|_{(2,1)} = 4$$

$$\frac{\partial f(2,1)}{\partial x} = 2xy \,|_{(2,1)} = 4$$

$$\frac{\partial f(2,1)}{\partial y} = x^2 \,|_{(2,1)} = 4$$

stoga primjenom formule (33) dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine zadane plohe M u točki $(2,1)$ dana sa:

$$\pi \ \dots \quad 4(x-2) + 4(y-1) - (z-4) = 0$$

odnosno

$$\pi \ \dots \quad 4x + 4y - z - 8 = 0.$$

Primjenom formule (34) dobivamo da su kanonske jednadžbe normale zadane plohe M u točki $(2,1)$ dane sa:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-1}.$$

Neka je ploha M zadana implicitnom jednadžbom: $\boxed{\mathrm{M} \ \dots \ F(x,y,z) = 0}$

i neka je $\mathrm{T} = (x_0, y_0, z_0)$ točka na plohi M u kojoj želimo postaviti tangencijalnu ravninu i normalu na plohu M.

Tada će se u točki $\mathrm{T}=(x_0,y_0,z_0)\in\mathrm{M}$ jednadžba tangencijalne ravnine π izračunavati po formuli

$$\pi \quad \ldots \quad F_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0, \tag{35}$$

a kanonske jedndžbe normale po formuli:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{36}$$

- ✓ Uočimo da je: $F_x(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$,

$$F_y(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),$$

$$F_z(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0).$$

Teorem o implicitno zadanim funkcijama – vidi: Kurepa, Matematička analiza III, str. 86 - 91.

Primjer

Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine i jednadžbu normale na plohu M zadane implicitnom jednadžbom:

$$\mathrm{M} \ \ldots \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

u točki (a,b,c).

Rješenje. Primijetimo da je:

$$F_x(a,b,c)=\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)=\frac{2x}{a^2}\Big|_{(a,b,c)}=\frac{2}{a}$$

$$F_y(a,b,c)=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)=\frac{2y}{b^2}\Big|_{(a,b,c)}=\frac{2}{b}$$

$$F_z(a,b,c)=\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)=-\frac{2z}{c^2}\Big|_{(a,b,c)}=-\frac{2}{c}$$

stoga primjenom formule (35) dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine zadane plohe M u točki (a,b,c) dana sa:

$$\pi \quad \ldots \qquad \frac{2}{a}(x-a)+\frac{2}{b}(y-b)-\frac{2}{c}(z-c)=0$$

odnosno

$$\pi \quad \ldots \qquad \frac{2}{a}x+\frac{2}{b}y-\frac{2}{c}z-2=0\,.$$

Primjenom formule (36) dobivamo da su kanonske jednadžbe normale zadane plohe M u točki (a,b,c) dane sa:

$$\frac{x-a}{\frac{2}{a}}=\frac{y-b}{\frac{2}{b}}=\frac{z-c}{-\frac{2}{c}}\,.$$

Taylorov teorem srednje vrijednosti

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren neprazan skup u $\mathbb{R}^2$ i neka je $f:\Omega \to \mathbb{R}$ klase C^1 na Ω, tj. $f \in C^1(\Omega)$ (dakle f je neprekidna na Ω i sve parcijalne derivacije prvog reda funkcije f postoje na Ω i ujedno su neprekidne funkcije na Ω).

Tada prva derivacija (diferencijal) funkcije f u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ je polinom $f'(x_0, y_0)$ prvog stupnja od dvije varijable t i s zadan formulom:

$$f'(x_0, y_0)(t,s) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot t + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot s .$$

- Ako je $f:\Omega \to \mathbb{R}$ klase C^2 na Ω, tj. $f \in C^2(\Omega)$ (f je neprekidna na Ω i sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije f postoje na Ω i ujedno su neprekidne funkcije na Ω), onda druga derivacija (drugi diferencijal) funkcije f u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ je polinom $f''(x_0, y_0)$ drugog stupnja od dvije varijable t i s zadan formulom:

$$f''(x_0, y_0)(t,s) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot t^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\cdot ts + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\cdot s^2 .$$

- Ako je $f:\Omega \to \mathbb{R}$ klase C^3 na Ω, tj. $f \in C^3(\Omega)$ (f je neprekidna na Ω i sve parcijalne derivacije trećeg reda funkcije f postoje na Ω i ujedno su neprekidne funkcije na Ω), onda treća derivacija (treći diferencijal) funkcije f u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ je polinom $f'''(x_0, y_0)$ trećeg stupnja od dvije varijable t i s zadan formulom:

$$f'''(x_0, y_0)(t,s) = \frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}\cdot t^3 + 3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2 \partial y}\cdot t^2 s + 3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y^2}\cdot ts^2 + \frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}\cdot s^3 .$$

Općenito, ako je $f:\Omega \to \mathbb{R}$ klase C^{p} na Ω, tj. $f \in C^{\mathrm{p}}(\Omega)$ (f je neprekidna na Ω i sve parcijalne derivacije p-tog reda funkcije f postoje na Ω i ujedno su neprekidne funkcije na Ω), onda p-ta derivacija (p-ti diferencijal) funkcije f u točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ je polinom $f^{(\mathrm{p})}(x_0, y_0)$ p-tog stupnja od dvije varijable t i s zadan formulom:

$$f^{(\mathrm{p})}(x_0, y_0)(t,s) = \sum_{i+j=\mathrm{p}} \binom{\mathrm{p}}{i} \frac{\partial^{\mathrm{p}} f(x_0,y_0)}{\partial x^i \partial y^j}\cdot t^i s^j .$$

Primjer

Odredite prvu, drugu i treću derivaciju funkcije $f(x,y)=e^x\cos y$ u točki $\mathrm{P}_0=(1,0)$.

Rješenje. Dakle, treba izračunati $f'(1,0)$, $f''(1,0)$ i $f'''(1,0)$ za funkciju $f(x,y)=e^x\cos y$.

Primijetimo da za zadanu funkciju imamo da je:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^x\cos y,\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=e^x\cos y,\qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=-e^x\sin y,\qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}=-e^x\cos y,\quad \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}=e^x\sin y,$$

stoga je:

$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}=e,\qquad \frac{\partial f(1,0)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x^2}=e,\qquad \frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial y^2}=-e,$$

$$\frac{\partial^3 f(1,0)}{\partial x^3}=e,\qquad \frac{\partial^3 f(1,0)}{\partial x^2\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^3 f(1,0)}{\partial x\partial y^2}=-e,\qquad \frac{\partial^3 f(1,0)}{\partial y^3}=0$$

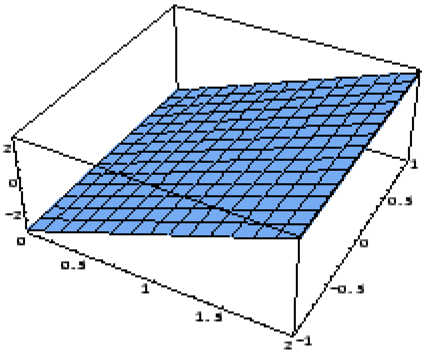
pa je

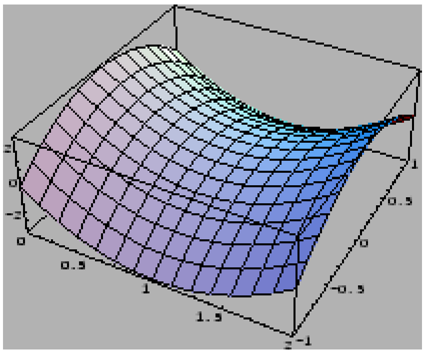
$$f'(1,0)(x-1,y)=e\cdot(x-1)+0\cdot y=e\cdot(x-1),$$

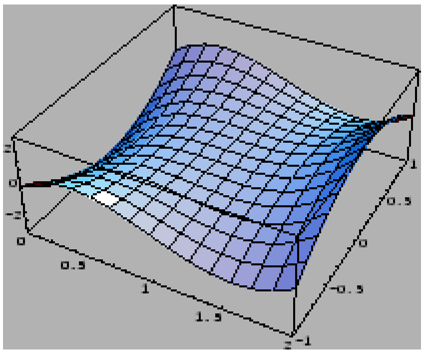
$$f''(1,0)(x-1,y)=e\cdot(x-1)^2+2\cdot 0\cdot(x-1)\cdot y+(-e)\cdot y^2=e\cdot\left((x-1)^2-y^2\right),$$

$$\begin{aligned}f'''(1,0)(x-1,y)&=e\cdot(x-1)^3+3\cdot 0\cdot(x-1)^2\cdot y+3\cdot(-e)\cdot(x-1)\cdot y^2+0\cdot y^3\\&=e\cdot\left((x-1)^3-3(x-1)\cdot y^2\right).\end{aligned}$$

Na sljedećim slikama prikazane su plohe koje su grafovi ovih funkcija.







Teorem 14 (Taylorov teorem srednje vrijednosti)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren neprazan skup i neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^{\mathrm{n}+1}$ na Ω. Ako su $\mathrm{A} = (x_0, y_0)$ i $\mathrm{B} = (x_0 + h, y_0 + k)$ dvije točke iz otvorenog skupa Ω takve da spojnica $\overline{\mathrm{AB}}$ (točaka A i B) leži u Ω, onda vrijedi Taylorova formula:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{f'(x_0, y_0)}{1!}(h,k) + \frac{f''(x_0, y_0)}{2!}(h,k) + \frac{f'''(x_0, y_0)}{3!}(h,k) + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(\mathrm{n})}(x_0, y_0)}{\mathrm{n}!}(h,k) + R_{\mathrm{n}} \tag{37}$$

gdje je

$$R_{\mathrm{n}}(x_0, y_0; h, k) = \frac{f^{(\mathrm{n}+1)}(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta \cdot k)}{(\mathrm{n}+1)!}(h,k), \qquad 0 < \theta < 1 \tag{38}$$

ostatak Taylorove formule u Langrangeovom obliku.

Dokaz:

Sami – vidi: Kurepa, Matematička analiza III, str. 97-98.

Napomena:

Teorem 14 upućuje nas da u okolini točke $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ funkciju f aproksimiramo Taylorovim polinomom n-tog stupnja

$$T_{\mathrm{n}}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{f'(x_0, y_0)}{1!}(x - x_0, y - y_0) + \frac{f''(x_0, y_0)}{2!}(x - x_0, y - y_0) + \cdots.$$

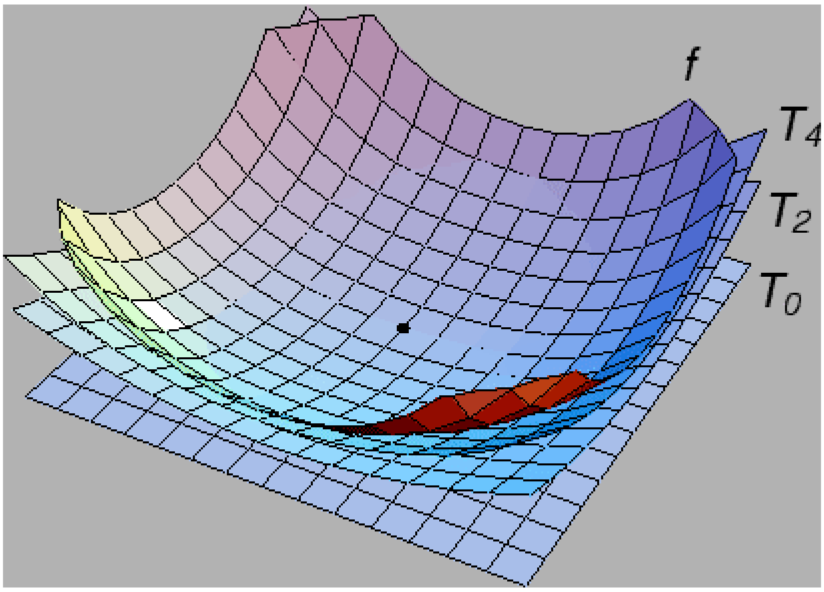
$$+ \frac{f^{(\mathrm{n})}(x_0, y_0)}{\mathrm{n}!}(x - x_0, y - y_0)$$

Da bismo došli do ocjene greške te aproksimacije primijetimo da su funkcije

$$\varphi_i(t) = \frac{\partial^{\mathrm{n}+1}}{\partial x^i \partial y^{\mathrm{n}+1-i}} f(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k), \qquad t \in [0,1] \tag{39}$$

neprekidne na segmentu $[0,1]$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, \mathrm{n}+1$.

Na sljedećoj prikazano je kako Taylorovi polinomi sve bolje aproksimiraju funkciju $f\left(x,y\right)=e^{x^2+y^2}$ u okolini točke $\left(0,0\right)$. Polinomi T_1 i T_3 nisu ucrtani, jer je $T_1=T_0$ i $T_3=T_2$.



Primjer

Aproksimirajte funkciju $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{1+x+y}$ Taylorovim polinomom trećeg stupnja u točki $P_0=\left(0,0\right)$.

Rješenje. Primijetimo da za zadanu funkciju imamo da je:

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=-\frac{1}{\left(1+x+y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial y^2}=\frac{2}{\left(1+x+y\right)^3},$$

$$\frac{\partial^3 f\left(x,y\right)}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f\left(x,y\right)}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f\left(x,y\right)}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 f\left(x,y\right)}{\partial y^3}=\frac{-6}{\left(1+x+y\right)^4},$$

odnosno

$$f\left(0,0\right)=1$$

$$\frac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial x}=\frac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial y}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial y^2}=2,$$

$$\frac{\partial^3 f\left(0,0\right)}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f\left(0,0\right)}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f\left(0,0\right)}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 f\left(x,y\right)}{\partial y^3}=-6,$$

stoga dobivamo da je Taylorov polinom trećeg stupnja funkcije $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x+y}$ u točki $\mathrm{P}_0=(0,0)$ dan sa:

$$
\begin{aligned}
T_3(x,y) &= f(0,0)+\frac{f'(0,0)}{1!}(x,y)+\frac{f''(0,0)}{2!}(x,y)+\frac{f'''(0,0)}{3!}(x,y)\\
&= f(0,0)+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2+2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}xy+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2\right)\\
&\quad+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}x^3+3\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y}x^2y+3\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\partial y^2}xy^2+\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}y^3\right)\\
&=1+(-1)x+(-1)y+\frac{1}{2}\left(2x^2+2\cdot 2xy+2y^2\right)+\\
&\quad+\frac{1}{6}\left((-6)x^3+3\cdot(-6)x^2y+3\cdot(-6)xy^2+(-6)y^3\right)\\
&=1-x-y+x^2+2xy+y^2-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3
\end{aligned}
$$

Taylorovi i McLaurinovi redovi

Neka je f klase $C^\infty(\Omega)$. U tom slučaju imamo Taylorovu formulu za bilo koji n.

Ako je pri tom još $\lim\limits_{n\to\infty} R_{\mathrm{n}}=0$ (gdje je ostatak R_{n} Taylorove formule dan izrazom (38)), onda imamo da je Taylorova formula (37) dana sa:

$$
f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{f'(x_0,y_0)}{1!}(h,k)+\frac{f''(x_0,y_0)}{2!}(h,k)+\cdots+\frac{f^{(\mathrm{n})}(x_0,y_0)}{\mathrm{n}!}(h,k)
$$

ili

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=f(x_0,y_0)+\frac{f'(x_0,y_0)}{1!}(x-x_0,y-y_0)+\frac{f''(x_0,y_0)}{2!}(x-x_0,y-y_0)+\cdots\\
&\quad+\frac{f^{(\mathrm{n})}(x_0,y_0)}{\mathrm{n}!}(x-x_0,y-y_0)
\end{aligned}
$$

gdje je $x=x_0+h,\ \ y=y_0+k$, odnosno $h=x-x_0,\ \ k=y-y_0\ x=x_0+h$.

- Red

$$f\left(x_0,y_0\right)+\frac{f'\left(x_0,y_0\right)}{1!}\left(x-x_0,y-y_0\right)+\frac{f''\left(x_0,y_0\right)}{2!}\left(x-x_0,y-y_0\right)+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_0,y_0\right)}{n!}\left(x-x_0,y-y_0\right)+\cdots$$

zove se **Taylorov red**.

- Ako je $x_0=0,\quad y_0=0$, onda imamo **Mc-Laurinov red**

$$f\left(0,0\right)+\frac{f'\left(0,0\right)}{1!}\left(x,y\right)+\frac{f''\left(0,0\right)}{2!}\left(x,y\right)+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(0,0\right)}{n!}\left(x,y\right)+\cdots$$

Ekstremi funkcija više varijabli

Definicija

Neka $f:\Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Kažemo da funkcija f ima **lokalni minimum** $f(\mathrm{A})$ u točki $\mathrm{A} \in \Omega$ ako postoji $r > 0$ takav da za svaki $\mathrm{P} \in \Omega$ vrijedi:

$$d(\mathrm{A},\mathrm{P}) < r \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{A}) \leq f(\mathrm{P}). \tag{40}$$

Drugim riječima, funkcija f ima lokalni minimum ako postoji neka okolina $K(\mathrm{A};r) \subseteq \Omega$ oko točke A takva da u toj okolini funkcija f prima veće vrijednosti nego u točki A, gdje prima vrijednost $f(\mathrm{A})$.

Funkcija f ima **strogi lokalni minimum** $f(\mathrm{A})$ u točki $\mathrm{A} \in \Omega$ ako postoji $r > 0$ takav da za svaki $\mathrm{P} \in \Omega$ vrijedi: $\quad d(\mathrm{A},\mathrm{P}) < r \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{A}) < f(\mathrm{P}).$

- Kažemo da funkcija f ima **lokalni maksimum** $f(\mathrm{A})$ u točki $\mathrm{A} \in \Omega$ ako postoji $r > 0$ takav da za svaki $\mathrm{P} \in \Omega$ vrijedi:

$$d(\mathrm{A},\mathrm{P}) < r \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{A}) \geq f(\mathrm{P}). \tag{41}$$

Drugim riječima, funkcija f ima lokalni maksimum ako postoji neka okolina $K(\mathrm{A};r) \subseteq \Omega$ oko točke A takva da u toj okolini funkcija f prima manje vrijednosti nego u točki A, gdje prima vrijednost $f(\mathrm{A})$.

Funkcija f ima **strogi lokalni maksimum** $f(\mathrm{A})$ u točki $\mathrm{A} \in \Omega$ ako postoji $r > 0$ takav da za svaki $\mathrm{P} \in \Omega$ vrijedi: $\quad d(\mathrm{A},\mathrm{P}) < r \quad \Rightarrow \quad f(\mathrm{A}) > f(\mathrm{P}).$

- **Lokalni ekstrem** funkcije f je bilo koji lokalni maksimum ili lokalni minimum funkcije f ili strogi lokalni maksimum ili strogi lokalni minimum funkcije f.

Napomena:

Ako se vrijednost funkcije f u točki $\mathrm{A} \in \Omega$ uspoređuje s vrijednostima funkcije na cijelom području definicije $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (tj. domeni funkcije f), onda kažemo da funkcija f ima **globalni ekstrem**.

Neka funkcija f klase C^1 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ima lokalni ekstrem u točki A.

> (Podsjetimo se, funkcija f je klase C^1 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ako je f neprekidna na Ω i ako sve parcijalne derivacije prvog reda funkcije f postoje na Ω koje su neprekidne na Ω).

Neka je $n = 2$, $A = (x_0, y_0)$ i $P = (x, y)$.

Tada iz (40) proizlazi da i funkcija $x \mapsto f(x, y_0)$ ima lokalni ekstrem za $x = x_0$, što nužno povlači da je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Analogno i funkcija $y \mapsto f(x_0, y)$ ima lokalni ekstrem za $y = y_0$, što nužno povlači da je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

- Time zaključujemo, ako je funkcija f klase C^1 na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i ako ona ima lokalni ekstrem u točki A, onda nužno mora vrijediti da sve njene parcijalne derivacije prvog reda moraju iščezavati u točki $A = (x_0, y_0)$, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

- Jasno, ako promatramo funkciju od n varijabli, tj. ako je funkcija f klase C^1 na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i ako ona ima lokalni ekstrem u točki $A = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, onda nužno mora vrijediti da sve njene parcijalne derivacije prvog reda moraju iščezavati u točki $A = (x_0, y_0)$, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$$

  za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sve točke $A \in \Omega$ u kojima parcijalne derivacije funkcije f prvog reda iščezavaju nazivaju se **stacionarne točke** funkcije f. Ako je funkcija f barem klase C^1 na Ω, onda ona može imati lokalni ekstrem samo u stacionarnim točkama. S druge strane, funkcija ne mora imati ekstrem u svakoj stacionarnoj točki. Iz tog razloga potrebno je odrediti i dovoljan uvjet za postojanje ekstrema funkcije u stacionarnoj točki.

PRAVILO ZA ISPITIVANJE EKSREMA FUNKCIJE OD DVIJE VARIJABLE

1. Neka je je funkcija f klase C^2 na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ stacionarna točka funkcije f takva da u njoj vrijedi nužan uvjet za postojanje ekstrema funkcije, odnosno:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 .$$

2. Izračunajmo parcijalne derivacije drugog reda funkcije f :

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

3. Odredimo vrijednosti parcijalne derivacije drugog reda funkcije f u stacionarnoj točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ tako da stavimo da je:

$$\mathrm{A} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad \mathrm{B} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{i} \quad \mathrm{C} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

4. Promatrajmo matricu $\mathrm{q} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{bmatrix}$ i njenu determinantu $\boxed{\mathrm{D} = \det \mathrm{q} = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}$.

5. a) ako je $\mathrm{D} > 0$ onda funkcija f u stacionarnoj točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ ima strogi lokalni ekstrem i to minimum ako je $\mathrm{A} > 0$, odnosno maksimum ako je $\mathrm{A} < 0$;

   b) ako je $\mathrm{D} < 0$ onda funkcija f u stacionarnoj točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ nema ekstrema;

   c) ako je $\mathrm{D} = 0$ onda funkcija f u stacionarnoj točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ može ali ne mora imati ekstrem – treba provesti dodatna ispitivanja na temelju kojih će se dobiti informacije o egzistenciji ekstrema toj u stacionarnoj točki $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$.

Vidi primjere: Kurepa, Matematička analiza III, str. 54-55.

Primjeri

1. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)=x^2+y^2-4x+2y+5$.

Rješenje. Primijetimo da je:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x-4 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y+2,$$

stoga iz sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x-4=0 \quad &\Rightarrow \quad x=2, \\ 2y+2=0 \quad &\Rightarrow \quad y=-1 \end{aligned}$$

proizlazi da je $\mathrm{P}_0=(2,-1)$ stacionarna točka zadane funkcije. Izračunajmo sada parcijalne derivacije drugog reda funkcije f:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=2$$

te primijetimo da za zadanu funkciju vrijednosti parcijalnih derivacija ne ovise o izboru točke, stoga je:

$$\mathrm{A}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1)=2, \quad \mathrm{B}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,-1)=0 \quad \text{i} \quad \mathrm{C}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-1)=2$$

odnosno:

$$\boxed{\mathrm{D}=\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=4>0}$$

na temelju čega zaključujemo da zadana funkcija ima lokalni minimum $f(2,-1)=2$ $f(2,-1)=4+1-8-2+5=0$ u točki $(2,-1)$, jer je $\mathrm{A}=2>0$.

2. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)=x\cdot\ln(x+y)$.

Rješenje. Primijetimo da je:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\ln(x+y)+\frac{x}{x+y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{x}{x+y},$$

stoga iz sustava jednadžbi:

$$\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}=0,$$

$$\frac{x}{x+y}=0$$

proizlazi da je $x=0$ i $\ln y=0 \quad\Rightarrow\quad y=1$, odnosno da je $\mathrm{P}_0=(0,1)$ stacionarna točka zadane funkcije. Izračunajmo sada parcijalne derivacije drugog reda funkcije f:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{1}{x+y}+\frac{y}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}\quad \text{i}\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x+y)^2}$$

a potom vrijednosti parcijalnih derivacija drugog reda funkcije f u stacionarnoj točki $\mathrm{P}_0=(0,1)$:

$$\mathrm{A}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=\left(\frac{1}{x+y}+\frac{y}{(x+y)^2}\right)_{(0,1)}=2,$$

$$\mathrm{B}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1)=\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}\right)_{(0,1)}=1,$$

$$\mathrm{C}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)=\left(-\frac{x}{(x+y)^2}\right)_{(0,1)}=0$$

Budući da je

$$\boxed{\mathrm{D}=0-1=-1<0}$$

zaključujemo da zadana funkcija nema lokalnih ekstrema.

Uvjetni ekstremi

Primjer

3. Neka je $f(x,y)=x^2+y^2$. Tada iz

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x=0 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y=0,$$

proizlazi: $\quad x=0 \qquad y=0,$

odnosno da je $P_0=(0,0)$ stacionarna točka zadane funkcije. Izračunavanjem parcijalnih derivacija drugog reda:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=2,$$

gdje je: $\mathrm{A}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2, \qquad \mathrm{B}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=0, \qquad \mathrm{C}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2,$

odnosno:

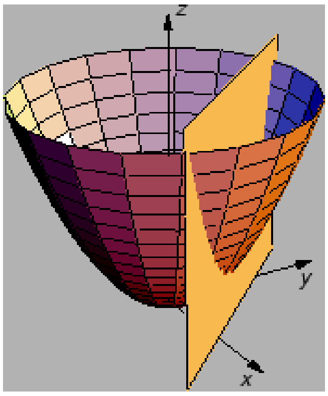
$$\boxed{\mathrm{D}=\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=4>0}$$

zaključujemo da zadana funkcija ima lokalni minimum $f(0,0)=0$ u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava.

➢ Promatramo sada samo one točke u domeni koje zadovoljavaju uvjet:

$$x+y-1=0.$$

Geometrijsko značenje toga uvjeta je da zadanu plohu M … $f(x,y)=x^2+y^2$ siječemo sa ravninom paralelnom s *z*-osi čija je jednadžba $x+y-1=0$ i čime se dobiva krivulja na plohi M, koja može imati lokalne ekstreme u točkama koje nisu stacionarne za zadanu funkciju f.



Dakle, iz $x+y-1=0$ proizlazi: $y=1-x$. Uvrštavanjem $y=1-x$ u zadanu funkciju

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

dobivamo funkciju po jednoj varijabli:

$$f(x,1-x)=g(x)=x^2+(1-x)^2=x^2+1-2x+x^2=2x^2-2x+1$$

$$=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$g(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

čije ekstreme možemo ispitati po pravilu računanja ekstrema funkcije jedne varijable (gradivo: Matematika 1 – primjena diferencijalnog računa).

U ovom primjeru lako se vidi da je graf funkcije $g(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ parabola s otvorom prema pozitivnom smjeru *y*-osi čije je tjeme u točki $\mathrm{T}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, što povlači da funkcija g ima lokalni minimum za $x=\frac{1}{2}$.

Time zadana funkcija $f(x,y)=x^2+y^2$ uz uvjet $x+y-1=0$ ima lokalni minimum u točki $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Definicija

Neka je zadana funkcija $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Kažemo da funkcija f ima **uvjetni ekstrem** u točki $\mathrm{P}_0\in\Omega$ uz uvjete $g_1(\mathrm{P})=0$, $g_2(\mathrm{P})=0,\ldots,$ $g_{\mathrm{m}}(\mathrm{P})=0$ ako funkcija $f|_S$ ima lokalni ekstrem u točki $\mathrm{P}_0\in\Omega$, gdje je

$$S=\{\mathrm{P}\in\Omega\mid g_1(\mathrm{P})=0, g_2(\mathrm{P})=0,\ldots,g_{\mathrm{m}}(\mathrm{P})=0\}$$

Komentar:

- Gore navedeni primjer pokazuje nam kako možemo rješavati takve probleme. Koristeći uvjete $g_1(\mathrm{P})=0$, $g_2(\mathrm{P})=0,\ldots,$ $g_{\mathrm{m}}(\mathrm{P})=0$ smanjuje se broj varijabli u funkciji f, a potom se za tako dobivenu funkciju rješava problem običnog lokalnog ekstrema.

Pri računanju uvjetnih eksrema često s koristi i **metoda Lagrangeovih multiplikatora**.

Naime, formira se nova funkcija

$$F(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}) + \lambda_1 g_1(\mathrm{P}) + \lambda_2 g_2(\mathrm{P}) + \cdots + \lambda_{\mathrm{m}} g_{\mathrm{m}}(\mathrm{P}).$$

Ako je f klase C^1 na Ω i ako u točki $\mathrm{P}_0 \in \Omega$ ima uvjetni ekstrem uz uvjete

$$g_1(\mathrm{P}) = 0,\ g_2(\mathrm{P}) = 0, \ldots,\ g_{\mathrm{m}}(\mathrm{P}) = 0$$

onda se funkcije $g_1, g_2, \ldots, g_{\mathrm{m}}$ i parcijalne derivacije funkcije F poništavaju u točki $\mathrm{P}_0 \in \Omega$.

Dakle, nužan uvjet da funkcija f ima uvjetni ekstrem u točki $\mathrm{P}_0 \in \Omega$ je:

$$\frac{\partial F(\mathrm{P}_0)}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial F(\mathrm{P}_0)}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial F(\mathrm{P}_0)}{\partial x_{\mathrm{n}}} = 0,$$

$$g_1(\mathrm{P}_0) = 0, \qquad g_2(\mathrm{P}_0) = 0, \quad \ldots \quad g_{\mathrm{m}}(\mathrm{P}_0) = 0,$$

čime se dobiva sustav od $\mathrm{n}+\mathrm{m}$ jednadžbi za $\mathrm{n}+\mathrm{m}$ nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{m}}$ pomoću kojeg se dobivaju točke $(x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}})$ u kojima zadana funkcija f možda ima uvjetne ekstreme.

Napomenimo da ova metoda daje samo stacionarne točke te da se dodatno mora ispitati da li u stacionarnoj točki postoji uvjetni ekstrem. Drugim rječima, treba ispitati i dovoljan uvjet za egzistenciju ekstrema (kod funkcija od dviju varijabli treba provesti korake 2, 3, 4 i 5 iz pravila za ispitivanje eksrema).

Primjer

4. Odredite uvjetni ekstrem funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ (iz primjera 3) uz uvjet $x + y - 1 = 0$ primjenom metode Lagrangeovih multiplikatora.

Dakle, formirajmo novu funkciju

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Tada imamo:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{\lambda}{2}$$

$$x+y-1=0,$$

odakle proizlazi: $-\lambda-1=0$, odnosno $\lambda=-1$ pa je: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

Zaključujemo da je točka $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ stacionarna točka zadane funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$ uz uvjet $x+y-1=0$. Budući da je graf funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$ rotacioni paraboloid, lako se vidi da će funkcija $f(x,y)=x^2+y^2$ imati lokalni minimum u (stacionarnoj) točki $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Za vježbu, primjenom koraka 2, 3, 4 i 5 iz pravila za ispitivanje ekstrema, dokazati da funkcija $f(x,y)=x^2+y^2$ ima lokalni minimum u (stacionarnoj) točki $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Vektorska analiza: skalarno i vektorsko polje

Vektorski prostor $X_0(E)$

Označimo sa *E* trodimenzionalni euklidski prostor, sa *M* ravninu iz *E*, sa *L* pravac iz *E* te sa O, P, Q,... točke iz *E*. Nadalje, sa $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ označavamo udaljenost točaka P i Q, tj. duljinu spojnice $\overline{\mathrm{PQ}}$ tih dviju točaka (dakle: $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = |\overline{\mathrm{PQ}}|$).

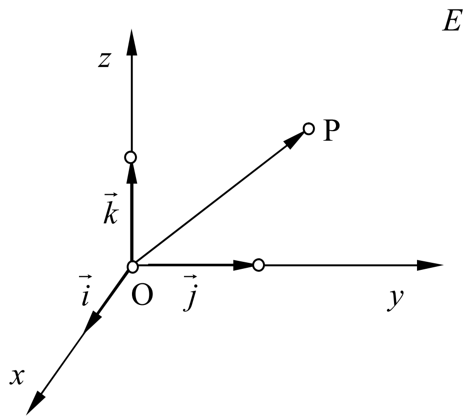
Neka je $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pravokutni koordinatni sustav euklidskog prostora *E*.

Ako je $\mathrm{O} \in E$ točka iz *E*, onda svakoj točki $\mathrm{P} \in E$ pripada jednoznačno (potpuno određen) **vektor** (orijentirana dužina) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, koji ima početak u točki O i kraj (svršetak) u točki P.

Vektor $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ nazivamo **radij-vektor** (ili vektor položaja) točke P u odnosu na točku O.

Ponovimo:

- udaljenost između točaka O i P zovemo duljinom vektora $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ i označavamo sa $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$;
- svaki vektor je jednoznačno određen svojim smjerom, orijentacijom i duljinom;
- jedinični vektor je vektor kojemu je duljina jednaka 1;
- nul-vektor je vektor kojemu je duljina jednaka nuli (uočimo da je nul-vektor zapravo orijentirana dužina koja ima početak i kraj u istoj točki, stoga nul-vektor nema jednoznačno određen smjer, a time ni orijentaciju).



- Kažemo da su bilo koja dva vektora jednaka ako oni imaju isti smjer, orijentaciju i duljinu. Ako je duljina nekog vektora jednaka jedan, onda kažemo da je taj vektor **jedinični vektor**, a ako je duljina nekog vektora jednaka nuli, onda kažemo da je taj vektor **nul-vektor** i označavamo ga sa: $\vec{0}$.

- Ako dva vektora imaju isti smjer i duljinu, a suprotnu orijentaciju, onda kažemo da su oni **suprotni vektori**. Konkretno, vektori $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ i $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ su suprotni vektori, gdje je: $\overrightarrow{\mathrm{PO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.

- Ako dva vektora imaju isti smjer, onda kažemo da su oni **kolinearni vektori**.
- Sa $\mathrm{P} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ dana je bijekcija sa skupa E na skup

$$\mathrm{X}_0(E) = \left\{ \overrightarrow{\mathrm{OP}} \mid \mathrm{P} \in E \right\}$$

svih radij-vektora euklidskog prostora E koji imaju početak u točki O i kraj u točki P.

- Za bilo koja dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in \mathrm{X}_0(E)$ i realan broj $\lambda \in \mathbb{R}$ potpuno su određeni vektori $\vec{a} + \vec{b} \in \mathrm{X}_0(E)$ (zbroj vektora) i $\lambda \vec{a} \in \mathrm{X}_0(E)$ (produkt skalara s vektorom) pri čemu vrijede svojstva:

1. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (asocijativnost zbrajanja vektora),
2. postoji nul-vektor $\vec{0}$ takav da je:
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$ (egzistencija neutrala za zbrajanje vektora),
3. za svaki vektor $\vec{a}$ postoji jedinstven vektor $-\vec{a}$ takav da je:
$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$$ (egzistencija suprotnog elementa),
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost zbrajanje vektora),
5. $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (distributivnost množenja sa skalarom prema zbrajanju vektora),
6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (distributivnost zbrajanja skalara prema množenju s vektorom),
7. $(\lambda \cdot \mu)\vec{a} = \lambda\left(\mu\vec{a}\right)$ (kompatibilnost množenja skalara sa množenjem s vektorom),
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$,

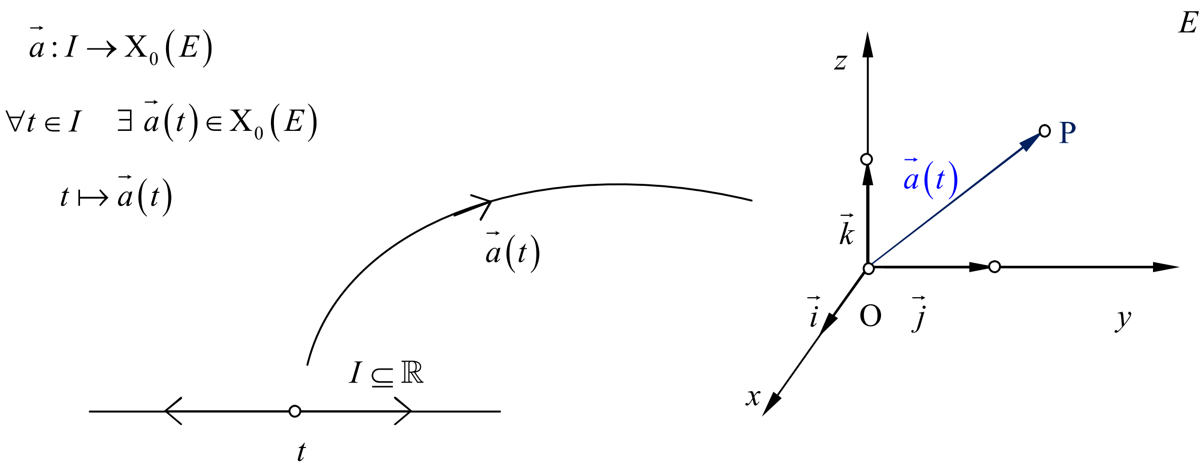
gdje je $\vec{a}, \vec{b} \in \mathrm{X}_0(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Uzimajući u obzir gore navedene funkcije

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \mapsto \vec{a} + \vec{b}, \qquad \text{sa } \mathrm{X}_0(E) \times \mathrm{X}_0(E) \text{ u } \mathrm{X}_0(E)$$
$$\left(\lambda, \vec{a}\right) \mapsto \lambda \cdot \vec{a}, \qquad \text{sa } \mathbb{R} \times \mathrm{X}_0(E) \text{ u } \mathrm{X}_0(E)$$

zajedno sa navedenih osam svojstva tih funkcija, kažemo da je $\mathrm{X}_0(E)$ **vektorski prostor prostora** E. Drugim riječima, $\mathrm{X}_0(E) = \left\{ \overrightarrow{\mathrm{OP}} \mid \mathrm{P} \in E \right\}$ je vektorski prostor svih radij-vektora točaka prostora E u odnosu na točku O (ishodište pravokutnog koordinatnog sustava).

Neka je $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ pravokutni koordinatni sustav euklidskog prostora E i neka je $\mathrm{X}_0(E) = \left\{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \mid \mathrm{P} \in E\right\}$ vektorski prostor svih radij-vektora točaka prostora E u odnosu na točku O. Ako je $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \varnothing$ neprazan podskup skupa realnih brojeva (tj. I je neki otvoreni interval u skupu realnih brojeva) i ako je svakom elementu $t \in I$ pridružen vektor $\vec{a}(t) \in \mathrm{X}_0(E)$, onda kažemo da je zadana **vektorska funkcija** $\vec{a}: I \to \mathrm{X}_0(E)$ sa otvorenog intervala I u vektorski prostor $\mathrm{X}_0(E)$.



Rastavimo vektorsku funkciju $\vec{a}(t)$ po vektorima baze $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ prostora $\mathrm{X}_0(E)$:

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

gdje su $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ skalarne funkcije sa I u $\mathbb{R}$.

Primijetimo da su skalarne funkcije $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ definirane na istom intervalu kao i zadana vektorska funkcija $\vec{a}(t)$.

Podsjetimo se definicije neprekidnosti funkcije jedne varijable:

Skalarna funkcija $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $t_0 \in I$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $t \in I$ vrijedi:

$$|t - t_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon .$$

Definicija

Za vektorsku funkciju $\vec{a}: I \to \mathrm{X}_0(E)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ **kažemo da je neprekidna u točki** $t_0 \in I$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $t \in I$ vrijedi:

$$|t - t_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)\right| < \varepsilon . \tag{42}$$

Primijetimo da je $\left|\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)\right|$ duljina vektora $\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)$.

Uzimajući u obzir definiciju duljine vektora $\vec{a}$:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}} \, ,$$

gdje je $\vec{a} \cdot \vec{a}$ skalarni produkt vektora $\vec{a}$ sa samim sobom proizlazi da za vektor $\vec{a}$ zadan pravokutnim koordinatama $\vec{a} = a_\mathrm{x} \vec{i} + a_\mathrm{y} \vec{j} + a_\mathrm{z} \vec{k}$ imamo da se njegova duljina izračunava po formuli:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\mathrm{x}^2 + a_\mathrm{y}^2 + a_z^2}} \, .$$

Time imamo da je:

$$\left|\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)\right| = \sqrt{\left(a_x(t) - a_x(t_0)\right)^2 + \left(a_y(t) - a_y(t_0)\right)^2 + \left(a_z(t) - a_z(t_0)\right)^2}$$

gdje je: $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$, $\vec{a}(t_0) = a_x(t_0)\vec{i} + a_y(t_0)\vec{j} + a_z(t_0)\vec{k}$.

Dakle, vektorska funkcija $\vec{a}(t) \in \mathrm{X}_0(E)$ će biti neprekidna u točki $t_0 \in I$ ako i samo ako su njene skalarne funkcije (komponente) $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ neprekidne u točki $t_0 \in I$.

Primjer

Vektorska funkcija $\vec{a}(t) = a \cos t \, \vec{i} + b \sin t \, \vec{j}$, gdje su a i b strogo pozitivni realni brojevi $(a, b > 0)$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$, jer su funkcije $t \mapsto a \cos t$ i $t \mapsto b \sin t$ neprekidne na $\mathbb{R}$.

Skup $\{a(t) \in E \mid t \in \mathbb{R}\}$ je elipsa sa poluosima *a* i *b*. Naime, kada parameter t prolazi skupom $\mathbb{R}$ s lijeva u desno u pozitivnom smjeru (tj. u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu) točka $a(t) = (a \cos t, b \sin t)$ obiđe elipsu beskonačno puta (jer je $t \in \mathbb{R}$).

Definicija

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval u skupu realnih brojeva (koji može biti otvoren, zatvoren ili poluotvoren).

Za skup $$\Gamma = \{a(t) \in E \mid t \in I\}$$

kažemo da je **krivulja u prostoru** *E*, pri čemu je $\vec{a} : I \to X_0(E)$ vektorska funkcija kojoj je pridružena krivulja Γ.

Naime, krivulja Γ predstavlja trag (trajektoriju) materijalne točke $a(t) \in E$ koja u trenutku t prolazi kroz $\vec{a}(t)$.

- Neka je O fiksna točka euklidskog prostora *E* i neka je $X_0(E) = \{\overrightarrow{OP} \mid P \in E\}$ vektorski prostor svih radij-vektora točaka prostora *E* u odnosu na točku O. Neka je $\Omega \subseteq E$ podskup prostora *E*.

  Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ naziva se **skalarno polje**, a funkcija $\vec{a} : \Omega \to X_0(E)$ **vektorsko polje**.

Primjer

Neka je $P_0 \in E$ neka zadana točka. Tada svakoj točki $P \in E$ pripada njezina udaljenost od točke $P_0 \in E$, tj. broj $d(P_0, P)$.

Sa $P \mapsto d(P_0, P)$ definirano je skalrno polje (funkcija) sa *E* u $\mathbb{R}$.

Gradijent skalarnog polja. Divergencija i rotacija vektorskog polja

Neka je $\Omega \subseteq E$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ skalarno polje i $\vec{a} : \Omega \to X_0(E)$ vektorsko polje i neka su oni klase C^1 na Ω (tj. funkcije f i $\vec{a}$ neprekidne su na Ω i imaju neprekidne derivacije 1. Reda na Ω).

Tada definiramo nova polja:

- vektorsko polje: $\operatorname{grad} f$ (gradijent od f),
- skalarno polje: $\operatorname{div} \vec{a}$ (divergens od $\vec{a}$),
- vektorsko polje: $\operatorname{rot} \vec{a}$ (rotacija od $\vec{a}$).

Neka je $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ pravokutni koordinatni sustav euklidskog prostora E. Tada imamo da je:

$$f = f\left(x, y, z\right)$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

i definiramo:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Primjeri

1. Odredite $\operatorname{grad} f$ ako je $f\left(x, y, z\right) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + \dfrac{z}{y^2 + z^2}$.

Rješenje. Uzimajući u obzir da je:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

te da za zadanu funkciju vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{-z \cdot 2y}{\left(y^2 + z^2\right)^2} = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - \frac{2yz}{\left(y^2 + z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1 \cdot \left(y^2 + z^2\right) - z \cdot 2z}{\left(y^2 + z^2\right)^2} = \frac{y^2 - z^2}{\left(y^2 + z^2\right)^2}$$

dobivamo: $$\operatorname{grad} f = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\vec{i} + \left(-\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - \frac{2yz}{\left(y^2 + z^2\right)^2}\right)\vec{j} + \frac{y^2 - z^2}{\left(y^2 + z^2\right)^2}\vec{k}.$$

2. Izračunajte div $\vec{a}$ i rot $\vec{a}$ ako je

$$\vec{a} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(z^2 - x^2\right)\vec{j} + \left(3x - 3z^2\right)\vec{k}$$

Rješenje. Uzimajući u obzir da je:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

gdje je: $a_x = x^2 - y^2, \quad a_y = z^2 - x^2, \quad a_z = 3x - 3z^2$

imamo da je:

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -6z$$

pa je div $\vec{a} = 2x - 6z$.

Izračunajmo sada rotor od $\vec{a} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(z^2 - x^2\right)\vec{j} + \left(3x - 3z^2\right)\vec{k}$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \left(0 - 2z\right)\vec{i} + \left(0 - 3\right)\vec{j} + \left(-2x + 2y\right)\vec{k}$$

$$= -2z\vec{i} - 3\vec{j} - 2\left(x - y\right)\vec{k}$$

Parametrizacija Jordanovog luka

Uzimajući u obzir (prethodno navedenu) definiciju krivulje Γ u prostoru E imamo da je krivulja

$$\Gamma = \{ r(t) \in E \mid t \in I \}$$

skup svih točaka $r(t) \in E$ takvih da je $t \in I$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval u skupu realnih brojeva, a $\vec{r} : I \to X_0(E)$ je vektorska funkcija neprekidna na intervalu I.

Uočimo da su koordinate točke $r(t) \in E$ ujedno skalarne komponente vektorske funkcije $\vec{r}(t)$, $t \in I$. Drugim riječima, vektorskoj funkciji $\vec{r} : I \to X_0(E)$ pridružena je funkcija $r : I \to E$.

Konkretno, ako rastavimo vektorsku funkciju $\vec{r}(t)$ po vektorima baze $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ prostora $X_0(E)$:

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}$$

gdje su $r_x(t)$, $r_y(t)$, $r_z(t)$ skalarne komponente (funkcije) vektorske funkcije $\vec{r}(t)$, $t \in I$, onda je vektorskoj funkciji $\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}$ pridružena točka:

$$r(t) = \big(r_x(t),\ r_y(t),\ r_z(t)\big), \quad t \in I .$$

Time je: $\vec{r}(t) = \overrightarrow{Or(t)}$,

tj. vektorsku funkciju $\vec{r}(t)$ možemo shvatiti kao radij-vektor točke $r(t)$ u odnosu na točku O (ishodište praokutnog koordinatnog sustava).

- Napomenimo da je ova definicija krivulje preopširna te da se općenito svaka krivulja može dobiti nastavljanjem (tzv. ljepljenjem) od konačno mnogo Jordanovih lukova, stoga će se u nastavku promatrati, a prije toga definirati Jordanov luk (tj. jednostavna glatka krivulja).

Definicija

Za skup $\Gamma \subset E$ kažemo da je **Jordanov luk (tj. jednostavna glatka krivulja) sa rubovima** ako su ispunjena sljedeća četiri uvjeta:

1^0 postoji barem jedan uređen par segmenta $I = [a,b]$ i funkcije $r : I \to E$ takvi da je:

$$\Gamma = \{ r(t) \in E \mid t \in I \}; \tag{43}$$

2^0 funkcija r je bijekcija sa I na Γ;

3^0 funkcija $\vec{r}$ je klase C^1 na I;

4^0 $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in I$.

Točke $\mathrm{A} = r(a)$ i $\mathrm{B} = r(b)$ zovu se *rubne točke* ili *krajevi luka* Γ.

Za uređen par (I, r) koji zadovoljava navedene uvjete kažemo da je *glatka parametrizacija skupa* Γ. Ako je funkcija $\vec{r}$ klase C^p na I, onda kažemo da je Jordanov luk Γ klase C^p na I.

Ako promatramo Jordanov luk Γ u (trodimenzionalnom) euklidskom prostoru *E*, onda je bilo koja točka $r(t) \in \Gamma$ Jordanovog luka Γ dana sa:

$$r(t) = \left(r_x(t),\ r_y(t),\ r_z(t)\right), \quad t \in I,$$

stoga je

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

parametrizacija (vektorska jednadžba) Jordanovog luka Γ, a jednadžbe

$$x = r_x(t), \quad y = r_y(t), \quad z = r_z(t), \quad t \in I$$

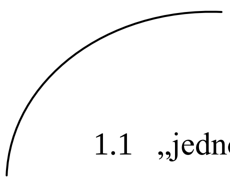
su parametarske jednadžbe Jordanovog luka Γ.

- Kada parametar t prolazi segmentom $I = [a, b]$ od a prema b, onda točka $r(t)$ prolazi krivuljom Γ od rubne točke A do rubne točke B. Pritom svakom realnom broju $t \in I$ pripada samo jedna točka na Jordanovom luku Γ i obratno svakoj točki $\mathrm{T} \in \Gamma$ pripada jedinstveni $t \in I$ takav da je $\mathrm{T} = r(t)$. Dakle uvjet 2^0 znači da krivulja Γ ne presijeca samu sebe.

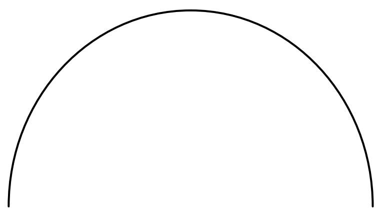
  Nadalje, uvjet 3^0 znači da u svakoj točki $\mathrm{T} \in \Gamma$ krivulja Γ ima tangentu i da se ta tangenta „neprekidno" mijenja kada točka T po Jordanovom luku Γ putuje od točke A prema točki B.

  Uvjet 4^0 znači da je u svakoj točki $\mathrm{T} \in \Gamma$ derivacija vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ različita od nul-vektora, odnosno da nijedna točka Jordanovog luka nije šiljak niti ekstrem.

Primjeri Jordanovog luka (jednostavne glatke krivulje)

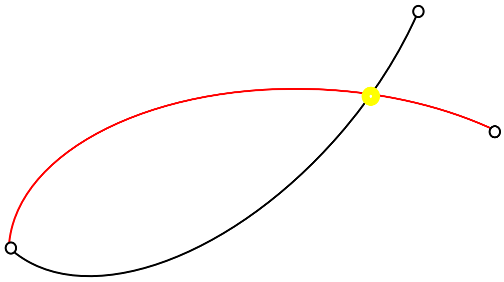


1.1 „jednostavni" luk

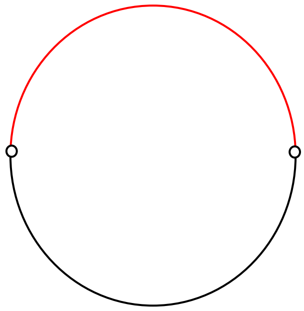


1.2 polukružnica (je Jordanov luk)

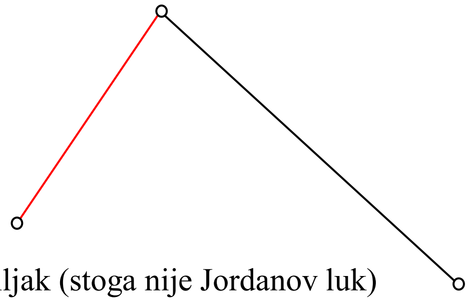
Primjeri krivulja koje nisu Jordanovi luk



2.2 krivulja se presijeca (stoga nije Jordanov luk)



2.1 kružnica (nije Jordanov luk već Jordanova krivulja)



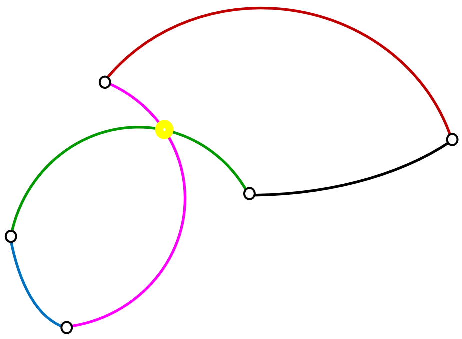
2.3 krivulja ima šiljak (stoga nije Jordanov luk)

Za skup $\Gamma \subset E$ kažemo da je **po dijelovima glatka krivulja**, ako se on može dobiti od konačno Jordanovih lukova Γ_1, $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ nastavljanjem jedan na drugi tako da se završna točka Jordanovog luka Γ_k veže s početnom točkom Jordanovog luka Γ_{k+1} za svaki $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i eventualno završna točka Jordanovog luka Γ_n s početnom točkom Jordanovog luka Γ_1

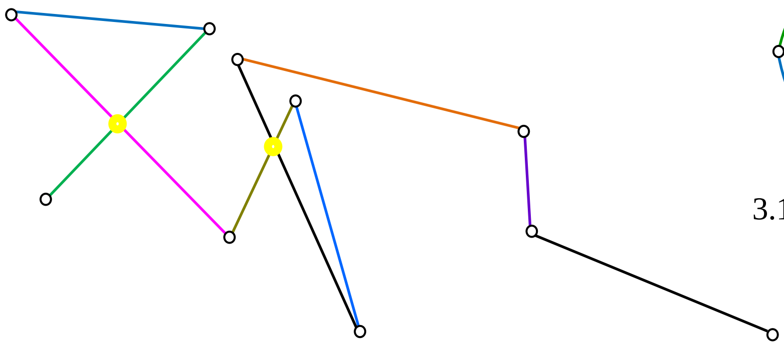
Napomena:

Primjeri krivulja 2.1, 2.2 i 2.3 su po dijelovima glatke krivulje (dobivaju se od po dva Jordanova luka).

Još nekoliko primjera po dijelovima glatkih krivulja:



3.1 dobiva se od pet Jordanovih lukova



3.2 dobiva se od devet Jordanovih lukova

Krivulja Γ može samu sebe presijecati najviše konačno puta.

Ako je $r(a)=r(b)$, onda je krivulja Γ zatvorena (primjeri krivulja 2.1 i 3.1), a ako je $r(a)\neq r(b)$, onda krivulja Γ ima rubove $r(a)$ i $r(b)$.

Zatvorena po dijelovima glatka krivulja koja samu sebe ne presijeca naziva se *jednostavna po dijelovima glatka zatvorena krivulja*.

Tipični primjeri jednostavnih zatvorenih krivulja su kružnica i rub pravokutnika, pri čemu je kružnica glatka, a rub pravokutnika po dijelovima glatka krivulja.

Krivolinijski integral prve i druge vrste

Krivolinijski integral prve vrste

Neka je Γ Jordanov luk, čija je parametrizacija dana sa:

$$r = r(t), \quad t \in [a,b], \quad a < b .$$

Podsjetimo se, prema definiciji Jordanovog luka (tj. jednostavne glatke krivulje) sa rubovima imamo da je funkcija r bijekcija sa segmenta $[a,b]$ na Γ, funkcija $\vec{r}$ je klase C^1 na $[a,b]$ i vrijedi $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in [a,b]$.

- Neka je $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ realna funkcija (skalarno polje) definirana na krivulji $\Gamma = \{ r(t) \in E \mid t \in [a,b] \}$. Tada je kompozicija $f \circ \vec{r}$ definirana na segmentu $[a,b]$.

Definicija

Ako je funkcija $t \mapsto \left(f \circ \vec{r} \right)(t) \cdot \left| \vec{r}\,'(t) \right|$ integrabilna na segmentu $[a,b]$, onda se integral

$$\int_a^b f\left[\vec{r}(t)\right] \cdot \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt \tag{44}$$

naziva **krivolinijski integral prve vrste funkcije** f **po krivulji** Γ i označava se sa:

$$\int_\Gamma f\, ds , \tag{45}$$

gdje je ds diferencijal duljine luka krivulje Γ i vrijedi:

$$\boxed{ds = \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt} . \tag{46}$$

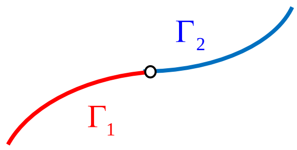
Primijetimo da je integral

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f\left[\vec{r}(t)\right] \cdot \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt$$

analogan integralu $\int_a^b f(x)\,dx$, pri čemu ds simbolizira mjeru na krivulji Γ, kao što dx simbolizira mjeru na pravcu.

Svojstva krivolinijskog integrala proizlaze iz svojstava (određenog) integrala, stoga imamo:

(1) $\int\limits_{\Gamma}(\lambda \cdot f)\,ds = \lambda \cdot \int\limits_{\Gamma} f\,ds$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ (konstanta);



(2) $\int\limits_{\Gamma}(f+g)\,ds = \int\limits_{\Gamma} f\,ds + \int\limits_{\Gamma} g\,ds$;

(3) $\int\limits_{\Gamma} f\,ds = \int\limits_{\Gamma_1} f\,ds + \int\limits_{\Gamma_2} f\,ds$, gdje je krivulja Γ podijeljena na dvije krivulje Γ_1 i Γ_2.

Neka je $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ pravokutni koordinatni sustav euklidskog prostora E i neka je

$$\boxed{\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}, \quad t \in [a,b], \quad a < b}$$

parametrizacija (vektorska jednadžba) Jordanovog luka Γ.

Funkcija f (skalarno polje definirano na krivulji Γ) u sustavu $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ opisuje se funkcijom iz $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}$ koju i dalje označavamo sa f, odnosno sa $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$.

Tada je kompozicija $f\left[\vec{r}(t)\right]$ dana sa:

$$f\left[\vec{r}(t)\right] = f\left[r_x(t), r_y(t), r_z(t)\right] \tag{47}$$

a duljina vektorske funkcije $\vec{r}\,'(t)$ sa:

$$\left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{\left(r_x'(t)\right)^2 + \left(r_y'(t)\right)^2 + \left(r_z'(t)\right)^2} \tag{48}$$

stoga je:

$$\boxed{\int\limits_{\Gamma} f\,ds = \int\limits_a^b f\left[r_x(t), r_y(t), r_z(t)\right] \cdot \sqrt{\left(r_x'(t)\right)^2 + \left(r_y'(t)\right)^2 + \left(r_z'(t)\right)^2}\,dt}\,. \tag{49}$$

Napomena:

Iz identiteta (49) direktno slijedi da integral $\int\limits_{\Gamma} f\,ds$ postoji ako su funkcije $r_x(t)$, $r_y(t)$ i $r_z(t)$ klase C^1 na $[a,b]$ i ako je funkcija f neprekidna u nekoj okolini krivulje Γ.

Primjer

Izračunajte $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 ds$

po zavojnici $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+5t\,\vec{k}$ od točke $\mathrm{A}=(1,0,0)$ do točke $\mathrm{B}=(1,0,10\pi)$.

Rješenje. Primijetimo da je vektorskoj funkciji $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+5t\,\vec{k}$ pridružena točka:

$$r(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 5t).$$

Treba odrediti segment I s obzirom na njegove zadane rubne točke $\mathrm{A}=(1,0,0)$ i $\mathrm{B}=(1,0,10\pi)$.

Dakle iz: $\mathrm{A}=r(a)$

proizlazi $(1,0,0)=(\cos a,\ \sin a,\ 5a)$

odakle dobivamo:

$$\left.\begin{array}{r}\cos a=1\\ \sin a=0\\ 5a=0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\boxed{a=0}$$

i analogno iz: $\mathrm{B}=r(b)$

proizlazi $(1,0,10\pi)=(\cos b,\ \sin b,\ 5b)$

odakle dobivamo:

$$\left.\begin{array}{r}\cos b=1\\ \sin b=0\\ 5b=10\pi\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\boxed{b=2\pi}$$

što polači: $\boxed{I=[0,2\pi]}$.

U ovom primjeru imamo da je parametrizacija Jordanovog luka Γ zadana vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+5t\,\vec{k},\quad t\in[0,2\pi]$$

kojoj korenspondiraju parametarske jednadžbe:

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=5t,\quad t\in[0,2\pi],$$

stoga je kompozicija $f\left[\vec{r}(t)\right]$ dana sa:

$$f\left[\vec{r}(t)\right] = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = \left((\cos t)^2 + (\sin t)^2 + (5t)^2\right)^2$$

$$= \left(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} + 25t^2\right)^2 = \left(1+25t^2\right)^2$$

$$= 1 + 50t^2 + 625t^4 .$$

S druge strane iz $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 5t\,\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$

proizlazi $\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 5\,\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$

stoga primjenom identiteta (48) imamo da je:

$$\left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 5^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 25} = \sqrt{1+25}$$

$$= \sqrt{26}$$

odnosno primjenom identiteta (46) dobivamo:

$$ds = \sqrt{26}\ dt$$

pa je zadani integral dan sa

$$\int_\Gamma \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 ds = \int_0^{2\pi} \left(1+50t^2+625t^4\right)\sqrt{26}\ dt$$

$$= \sqrt{26}\int_0^{2\pi} \left(1+50t^2+625t^4\right) dt$$

$$= \sqrt{26}\left(t + 50\frac{t^3}{3} + 625\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{26}\left(t + 50\frac{t^3}{3} + 125t^5\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{26}\left(2\pi + 50\cdot\frac{8\pi^3}{3} + 125\cdot 32\pi^5\right)$$

$$= \sqrt{26}\left(2\pi + \frac{400\pi^3}{3} + 4000\,\pi^5\right).$$

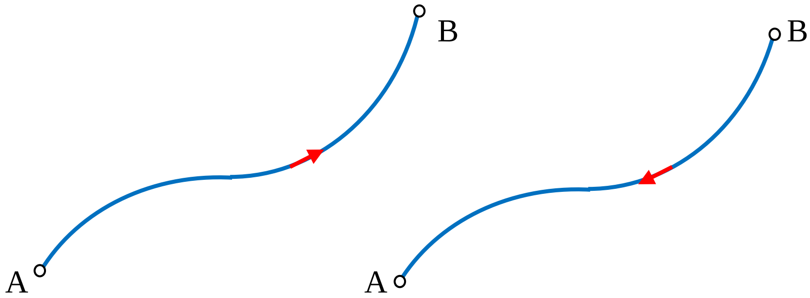
- Ako je kriulja Γ **po dijelovima glatka krivulja** dobivena nastavljanjem od konačno Jordanovih lukova Γ_1, $\Gamma_2,\ldots,$ Γ_n (nastavljanjem jedan na drugi tako da se završna točka Jordanovog luka Γ_k veže s početnom točkom Jordanovog luka Γ_{k+1} za svaki $k=1,2,\ldots,n-1$ i eventualno završna točka Jordanovog luka Γ_n s početnom točkom Jordanovog luka Γ_1), onda se **krivolinijski integral (prve vrste) funkcije** f **po krivulji** Γ definira sa:

$$\int_{\Gamma} f\, ds = \int_{\Gamma_1} f\, ds + \int_{\Gamma_2} f\, ds + \cdots + \int_{\Gamma_n} f\, ds\,. \tag{50}$$

Ako je funkcija f neprekidna u okolini krivulje Γ, onda integral u identitetu (50) postoji.

Krivolinijski integral druge vrste

Neka je Γ Jordanov luk sa rubovima A i B. Krivulju Γ možemo orijentirati na dva načina od A prema B i od B prema A, kao što je prikazano na slici.



Definicija

Neka je $([a,b],r)$ glatka parametrizacija Jordanovog luka Γ i neka Γ označava krivulju orijentiranu od ruba $\mathrm{A}=r(a)$ prema rubu $\mathrm{B}=r(b)$.

Ako je vektorsko polje $\vec{a}$ definirano na krivulji Γ i ako je funkcija $t \mapsto \vec{a}[r(t)]\cdot \vec{r}\,'(t)$ integrabilna na segmentu $[a,b]$, onda se integral

$$\int_a^b \vec{a}[r(t)]\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt \tag{51}$$

naziva **krivolinijski integral druge vrste vektorskog polja** $\vec{a}$ **po krivulji** Γ orijentiranoj od A prema B i označava se sa:

$$\int_{\Gamma} \vec{a}\, d\vec{r}\,, \tag{52}$$

gdje je: $\boxed{d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,dt}$.

Dakle imamo:

$$\int_{\Gamma} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_{a}^{b} \vec{a}\left[r(t)\right]\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt\,. \tag{53}$$

- Ako je kriulja Γ **po dijelovima glatka krivulja** dobivena nastavljanjem od konačno Jordanovih lukova Γ_1, $\Gamma_2,\ldots$, Γ_n (nastavljanjem jedan na drugi tako da se završna točka Jordanovog luka Γ_k veže s početnom točkom Jordanovog luka $\Gamma_{\mathrm{k}+1}$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}-1$ i eventualno završna točka Jordanovog luka Γ_n s početnom točkom Jordanovog luka Γ_1), onda se **krivolinijski integral (druge vrste) vektorskog polja** $\vec{a}$ **po orijentiranoj krivulji** Γ od točke A prema točki B definira sa:

$$\int_{\Gamma} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{a}\,d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{a}\,d\vec{r} + \cdots + \int_{\Gamma_\mathrm{n}} \vec{a}\,d\vec{r} \tag{54}$$

Neka je $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ pravokutni koordinatni sustav euklidskog prostora E i neka je $\vec{a}$ vektorsko polje definirano na krivulji Γ opisano sa tri skalarne funkcije a_x, a_y i a_z iz $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}$, tj.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\,,$$

a parametrizacija Jordanovog luka Γ neka je dana sa

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}\,, \quad t \in [a,b], \quad a < b\,,$$

gdje je $$r(t) = \left(r_x(t),\, r_y(t),\, r_z(t)\right), \quad t \in [a,b], \quad a < b\,.$$

Tada je podintegralni izraz u (51) dan sa:

$$\begin{aligned}
&\vec{a}\left[r(t)\right]\cdot \vec{r}\,'(t) = \vec{a}\left[r_x(t),\, r_y(t),\, r_z(t)\right]\cdot \vec{r}\,'(t) \\
&= \left(a_x\left[r_x(t),\, r_y(t),\, r_z(t)\right]\vec{i} + a_y\left[r_x(t),\, r_y(t),\, r_z(t)\right]\vec{j} + a_z\left[r_x(t),\, r_y(t),\, r_z(t)\right]\vec{k}\right)\cdot\left(r_x\,'(t)\vec{i} + r_y\,'(t)\vec{j} + r_z\,'(t)\vec{k}\right) \\
&= a_x\left[r_x(t),\, r_y(t),\, r_z(t)\right]\cdot r_x\,'(t) + a_y\left[r_x(t),\, r_y(t),\, r_z(t)\right]\cdot r_y\,'(t) + a_z\left[r_x(t),\, r_y(t),\, r_z(t)\right]\cdot r_z\,'(t)
\end{aligned}$$

stoga se krivolinijski integral druge vrste vektorskog polja $\vec{a}$ po krivulji Γ orijentiranoj od A prema B dan sa (53) zapisuje u obliku:

$$\int_{\Gamma} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_{\Gamma} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz\,, \tag{55}$$

a podrazumijeva se da podintegralnu funkciju treba računati duž krivulje Γ, tj. treba umjesto x, y i z po redu pisati $r_x(t)$, $r_y(t)$ i $r_z(t)$, a umjesto dx, dy i dz po redu pisati $r_x'(t)\,dt$, $r_y'(t)\,dt$ i $r_z'(t)\,dt$.

Primjer

Izračunajte $\int\limits_{\Gamma}\left(xy+y^2-xyz\right)dx+\left(x^2-xy\right)dy$

od točke $\mathrm{A}=(-1,1,0)$ do točke $\mathrm{B}=(2,4,0)$ duž luka Γ parabole $y=x^2$, $z=0$.

Rješenje.

Primijetimo da iz jednadžbe $y=x^2$, $z=0$ parabole, uvođenjem supstitucije $x=t$ dobivamo:

$y=t^2$, $z=0$, stoga su parametarske jednadžbe parabole dane sa

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=0, \quad t\in I$$

pa je $$\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}, \quad t\in I$$

parametrizacija (vektorska jednadžba) zadane parabole, kojoj j pridružena točka $r(t)=\left(t,t^2,0\right)$.

Odredimo sada segment I s obzirom na njegove rubne točke $\mathrm{A}=(-1,1,0)$ i $\mathrm{B}=(2,4,0)$.

Dakle iz: $$\mathrm{A}=r(a)$$

proizlazi $$(-1,1,0)=\left(a,a^2,0\right)$$

odakle dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} a=-1 \\ a^2=1 \\ 0=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a=-1}$$

i analogno iz: $$\mathrm{B}=r(b)$$

proizlazi $$(2,4,0)=\left(b,\mathrm{b}^2,0\right)$$

odakle dobivamo:

$$\left.\begin{aligned} b &= 2 \\ b^2 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{b}=2}$$

što polači: $\boxed{I=[-1,2]}$.

Time dobivamo da je parametrizacija zadane parabole dana sa:

$$\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}\,, \quad t\in[-1,2]$$

kojoj korenspondiraju parametarske jednadžbe:

$$x=t\,, \qquad y=t^2, \qquad z=0\,, \quad t\in[-1,2]\,,$$

odakle slijedi: $\qquad dx=dt\,, \quad dy=2t\,dt\,, \quad dz=0\,.$

Uzimajući u obzir identitet (55) dobivamo

$$\int_\Gamma \underbrace{\left(xy+y^2-xyz\right)}_{=a_x}dx+\underbrace{\left(x^2-xy\right)}_{=a_y}dy = \int_{-1}^{2}\left(t\cdot t^2+t^4-t\cdot t^2\cdot 0\right)dt+\left(t^2-t\cdot t^2\right)\cdot 2t\,dt$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(t^3+t^4\right)dt+\left(t^2-t^3\right)\cdot 2t\,dt$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(t^3+t^4+2t^3-2t^4\right)dt$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(3t^3-t^4\right)dt$$

$$=\left(3\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{3}{4}(16-1)-\frac{1}{5}(32+1)\right)$$

$$=\frac{45}{4}-\frac{33}{5}$$

$$=\frac{93}{20}$$