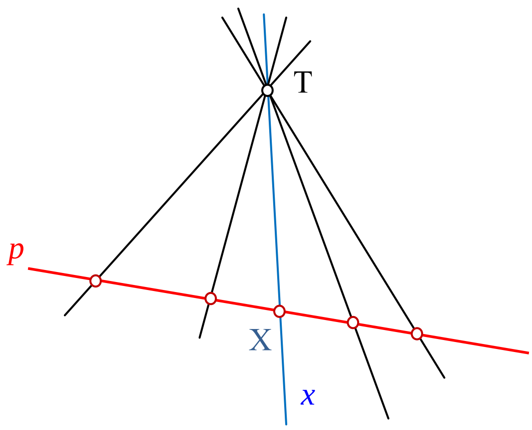
4. Perspektiviteti i perspektivne figure. Desarguesov teorem

Promatrajmo projektivnu ravninu kao operativni prostor i u njoj niz točaka (p) na nosiocu p i pramen pravaca (T) s vrhom T, pri čemu točka T ne leži na pravcu p.

- Jednoznačno obostrano preslikavanje skupa točaka niza (p) i skupa pravaca pramena (T) definira se na sljedeći način:

bilo kojoj točki X niza (p) pridružuje se onaj pravac x pramena (T) koji prolazi tom točkom X (obrnuto bilo kojem pravcu x pramena (T) pridružuje se ona točka X niza (p) koja leži na tom pravcu x, tj. $\mathrm{X} = \mathrm{p} \cap \mathrm{x}$).



Komentar:

- Za neki pramen (T) kažemo da je ***spojni pramen niza*** (p), ako je se on dobiva preslikavanjem nekog niza točaka (p) na taj pramen (T).

Drugim rječima, ako odaberemo neki proizvoljan niz točaka (p) i bilo koju točku T, koja ne leži na nosiocu p, onda skup svih pravaca, tj. spojnica točke T i bilo koje točke niza (p) čine pramen (T), koji zovemo <u>spojnim pramenom niza</u> (p).

Svakom nizu točaka (p) pridruženo je neograničeno mnogo spojnih pramenova tog niza (p).

- Za neki niz (p) kažemo da je ***presječni niz pramena*** (T), ako je se on dobiva preslikavanjem nekog pramena (T) na taj niza točaka (p).

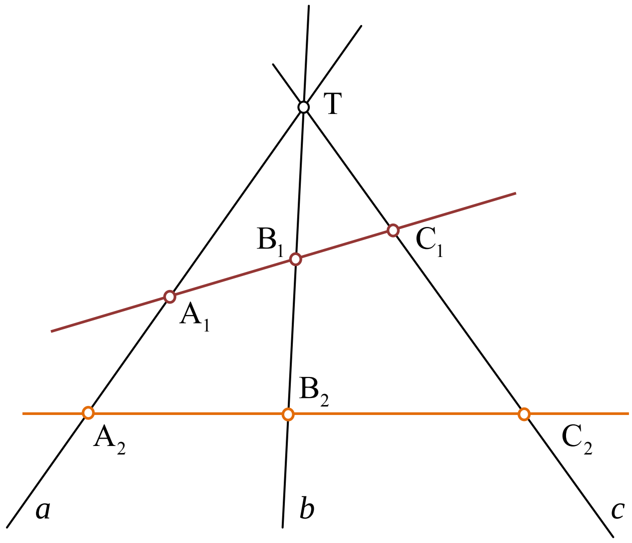
Drugim rječima, ako odaberemo neki proizvoljan pramen pravaca (T) i bilo koji pravac p, koji ne prolazi točkom T, onda skup svih točaka, tj. sjecišta pravca p i bilo kojeg pravca pramena (T) čine niz točaka (p), koji zovemo <u>presječnim nizom pramena</u> (T).

Svakom pramenu (T) pridruženo je neograničeno mnogo presječnih nizova tog pramena (T).

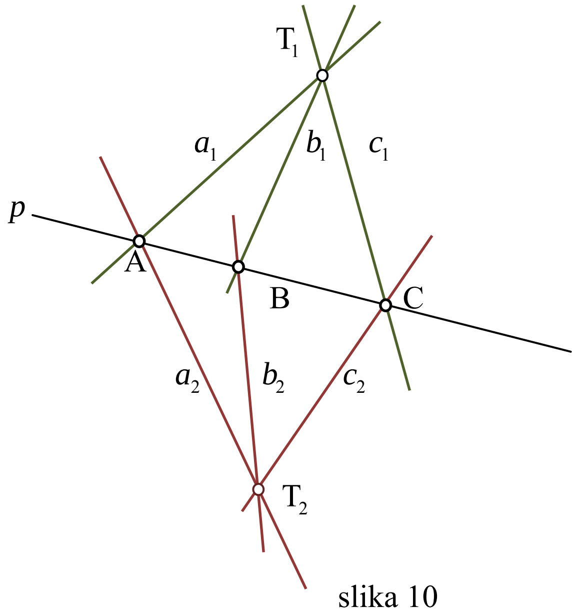
Definicija 4.1

Dva niza točaka $(p_1) = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \ldots\}$ i $(p_2) = \{\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_2, \ldots\}$ na različitim nosiocima $p_1 \neq p_2$ su međusobno ***perspektivna s obzirom na centar perspektiviteta*** T ako spojnice pridruženih točaka prolaze točkom T (vidi sliku 9).

Perspektivitet dvaju nizova (p_1) i (p_2) s centrom u točki T označavamo sa: $(p_1) \overset{\underset{=}{\mathrm{T}}}{\wedge} (p_2)$.



slika 9



slika 10

Drugim riječima, kažemo da su dva niza (p_1) i (p_2) perspektivno pridružena ako su (p_1) i (p_2) presječni nizovi jednog te istog pramena (T) - vidi sliku 9.

Definicija 4.2

Dva pramena pravaca $(\mathrm{T_1}) = \{a_1, b_1, c_1, ...\}$ i $(\mathrm{T_2}) = \{a_2, b_2, c_2, ...\}$ s različitim vrhovima $\mathrm{T_1} \neq \mathrm{T_2}$ su međusobno ***perspektivna s obzirom na pravac*** p ako im se pridruženi pravci sijeku u točkama niza (p) (vidi sliku 10). Pritom se pravac p zove <u>os perspektiviteta</u>.

Perspektivitet dvaju pramena $(\mathrm{T_1})$ i $(\mathrm{T_2})$ s osi p označavamo sa: $(\mathrm{T_1}) \overset{p}{\overline{\overline{\wedge}}} (\mathrm{T_2})$.

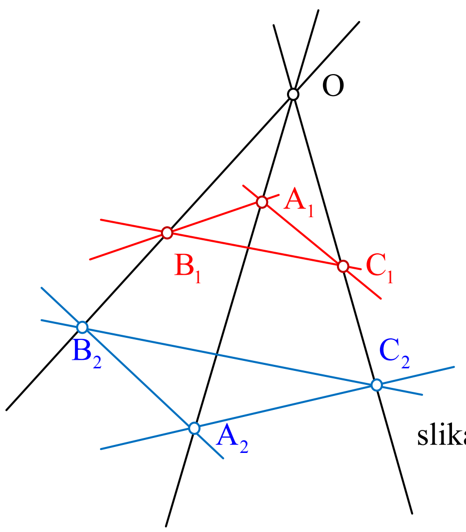
Drugim riječima, kažemo da su dva pramena $(\mathrm{T_1})$ i $(\mathrm{T_2})$ perspektivno pridružena ako su $(\mathrm{T_1})$ i $(\mathrm{T_2})$ spojni pramenovi jednog te istog niza (p) - vidi sliku 10.

Pojam perspektiviteta se može poopćiti na bilo koju figuru u projektivnoj ravnini ili projektivnom prostoru.

Definicija 4.3

<u>Dvije figure</u> $\mathrm{F_1}$ i $\mathrm{F_2}$ smještene u jednoj ravnini (ili prostoru) su ***perspektivne s obzirom na centar*** O ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje elemenata figura $\mathrm{F_1}$ i $\mathrm{F_2}$ takvo da sve spojnice pridruženih točaka prolaze točkom O.

Točku O zovemo <u>centrom perspektiviteta</u> tih dviju figura, a spomenute spojnice <u>zrakama perspektiviteta ili projektorima</u>.



slika 11

$$\mathrm{A_1B_1C_1} \overset{\mathrm{O}}{\overline{\overline{\wedge}}} \mathrm{A_2B_2C_2}$$

Na slici 11 prikazana su dva trovrha $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ koja su perspektivna s obzirom na centar O.

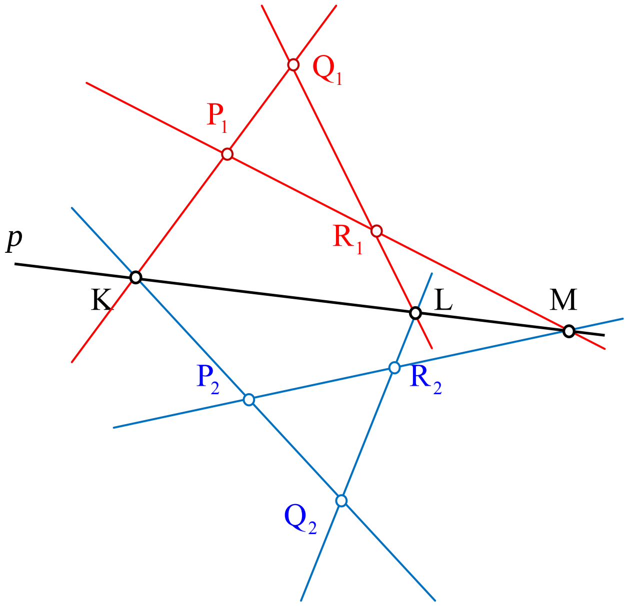
Time možemo pisati $A_1B_1C_1 \overset{\underline{\underline{O}}}{\wedge} A_2B_2C_2$.

Definicija 4.4

<u>Dvije figure</u> F_1 i F_2 smještene u jednoj ravnini (ili prostoru) su ***perspektivne s obzirom na pravac*** p ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje elemenata figura F_1 i F_2 takvo da parovi pridruženih pravaca sijeku u točkama pravca p.

Pravac p zovemo <u>osi perspektiviteta</u> tih dviju figura.

$$P_1Q_1R_1 \overset{\underline{\underline{p}}}{\wedge} P_2Q_2R_2$$



slika 12

Na slici 12 prikazana su dva trovrha $P_1Q_1R_1$ i $P_2Q_2R_2$ koja su perspektivna s obzirom na os p.

Time možemo pisati $P_1Q_1R_1 \overset{\underline{\underline{p}}}{\wedge} P_2Q_2R_2$.

Lako se može vidjeti da je definicija 4.4 dualna definiciji 4.3 s obzirom na projektivnu ravninu, kao operativni prostor. Jasno, pritom se pretpostavlja da su F_1 i F_2 dvije ravninske figure.
Dualizacijom definicije 4.3 u projektivnom trodimenzionalnom prostoru kao operativnom prostoru, dobiva se još jedan oblik perspektiviteta.

Definicija 4.5

Za <u>dvije prostorne figure</u> F_1 i F_2 kažemo da su ***perspektivne s obzirom na neku ravninu*** α ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje elemenata figura F_1 i F_2 takvo da parovi pridruženih pravaca i ravnina sijeku u točkama, odnosno pravcima ravnine α.

Teorem 4.6 (Desarguesov teorem)

Ako su dva trovrha $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ perspektivna s obzirom na neki centar (tj. točku) O, onda su oni perspektivni i s obzirom na neki pravac (tj. os) p i obratno.

Drugim rječima vrijedi:

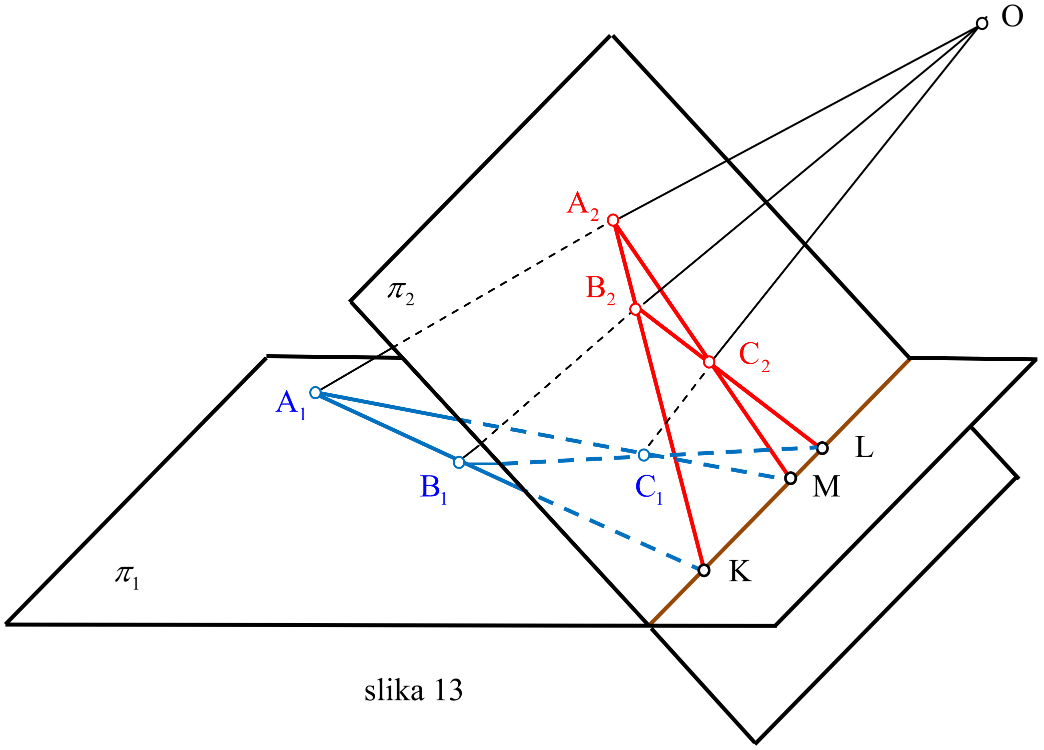
$$A_1B_1C_1 \overset{\underline{\underline{O}}}{\wedge} A_2B_2C_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_1B_1C_1 \overset{\underline{\underline{p}}}{\wedge} A_2B_2C_2 .$$

Pritom trovrsi $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ mogu ležati u različitim ravninama ili u jednoj te istoj ravnini projektivnog prostora.

Dokaz:

(*i*) Pretpostavimo da su π_1 i π_2 dvije različite ravnine projektivnog prostora takve da je ravnina π_1 zadana trima nekolinearnim točkama A_1, B_1, C_1 te da je ravnina π_2 zadana nekolinearnim točkama A_2, B_2, C_2. Drugim riječima, neka trovrsi $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ leže u različitim ravninama π_1 i π_2 i neka su oni perspektivni s obzirom na neku točku (centar) O.

Tada se spojnice (pridrženih točaka) A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 sijeku u točki O (vidi sliku 13).



slika 13

Treba dokazati da je: $A_1B_1 \cap A_2B_2 = K$, $B_1C_1 \cap B_2C_2 = L$, $A_1C_1 \cap A_2C_2 = M$, pri čemu su K, L i M kolinearne točke.

- Promatrajmo najprije ravninu A_1B_1O.

Uočimo da točke A_1 i B_1, ali isto tako i točke A_2 i B_2 leže u ravnini A_1B_1O, stoga primjenom teorema 1.2.4 imamo da i spojnice (pravci) A_1B_1, tj. A_2B_2 leže u toj ravnini.

Nadalje, prema teoremu 1.1.2 proizlazi da se pravci A_1B_1 i A_2B_2 sijeku u nekoj točki K.

> **Podsjetimo se:**
>
> **Teorem 1.2.4**
>
> Ako dvije različite točke P i Q leže u ravnini α određenoj nekolinearnim točkama A, B i C, onda svaka točka spojnice PQ (tj. pravac PQ) leži u toj ravnini α.
>
> **Teorem 1.1.2**
>
> Dva različita pravca projektivne ravnine sijeku se u točno jednoj točki.

Analogno, ako promatramo ravninu B_1C_1O.

Tada u toj ravnini leže točke B_1 i C_1, ali isto tako i točke B_2 i C_2, a samim time i pravci B_1C_1, tj. B_2C_2. Pritom se pravci B_1C_1 i B_2C_2 sijeku u nekoj točki L.

Na isti način imamo u ravnini A_1C_1O leže točke A_1 i C_1 kao i točke A_2 i C_2, stoga u njoj leže i pravci A_1C_1, tj. A_2C_2, koji se sijeku u nekoj točki M.

Dokažimo da su K, L i M kolinearne točke.

Uočimo da iz $A_1B_1 \cap A_2B_2 = K$ proizlazi da točka K leži na pravcu A_1B_1, čime leži u ravnini π_1. S druge strane imamo da točka K leži na pravcu A_2B_2, čime leži i u ravnini π_2.
Time imamo da točka K leži na presječnici ravnina π_1 i π_2 (vidi teorem 1.2.6).

Analogno iz $B_1C_1 \cap B_2C_2 = L$ imamo da točka L leži na pravcu B_1C_1, tj. u ravnini π_1, ali isto točka L leži i na pravcu B_2C_2, tj. u ravnini π_2. Time točka L leži na presječnici ravnina π_1 i π_2.

Na isti način iz $A_1C_1 \cap A_2C_2 = M$ zaključujemo da točka M leži na presječnici ravnina π_1 i π_2.

Dobili smo da sve tri točke K, L i M leže na presječnici ravnina π_1 i π_2, na osnovu čega zaključujemo da su K, L i M kolinearne točke.

❖ Obrat: neka trovrsi $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ leže u različitim ravninama π_1 i π_2 projektivnog prostora i neka su oni perspektivni s obzirom na neku os (pravac) *p*.

Tada se parovi pridrženih pravaca sijeku u nekim točkama pravca *p*, tj. na pravcu *p* postoje tri točke K, L i M takve da je $A_1B_1 \cap A_2B_2 = K$, $B_1C_1 \cap B_2C_2 = L$, $A_1C_1 \cap A_2C_2 = M$ (vidi sliku 13).

Jasno dani pravac *p* je presječnica ravnina π_1 i π_2.

Treba dokazati da postoji točka O takva da su trovrsi $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ perspektivni s obzirom na tu točku (centar) O, tj. da je: $A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2 = O$, gdje su točke A_1 i A_2, točke B_1 i B_2, odnosno točke C_1 i C_2 međusobno pridružene točke s obzirom na točku O. Jasno, A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 su spojnice pridruženih točaka (s obzirom na točku O).

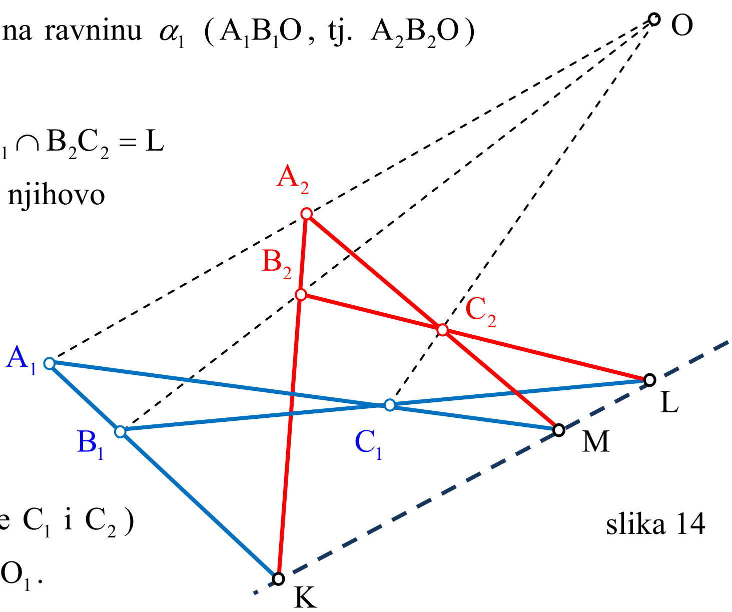
Iz početne pretpostavke proizlazi da pravac A_1B_1 leži u ravnini π_1, tj. da pravac A_2B_2 leži u ravnini π_2, a iz identiteta $A_1B_1 \cap A_2B_2 = K$ s obzirom na teorem 1.1.2 zaključujemo da pravci A_1B_1 i A_2B_2, kao i njihovo sjecište K moraju ležati i u nekoj ravnini α_1.

Time u projektivnom prostoru postoji točka O ($O \notin \pi_1$, $O \notin \pi_2$), koja će zajedno s točkama A_1 i B_1 određivati ravninu α_1 tj. ravninu A_1B_1O (ili analogno će točka O zajedno s točkama A_2 i B_2 određivati ravninu A_2B_2O).

Primjenom definicije projektivne ravnine na ravninu α_1 (A_1B_1O, tj. A_2B_2O) proizlazi: $A_1A_2 \cap B_1B_2 = O$.

Primjenom teorema 1.1.2 na identitet $B_1C_1 \cap B_2C_2 = L$ zaključujemo da pravci B_1C_1 i B_2C_2, kao i njihovo sjecište L moraju ležati u nekoj ravnini α_2.

Pretpostavimo da u proj. prostoru postoji točka $O_1 \neq O$ koja zajedno s točkama B_1 i C_1 određuje ravninu α_2.
Tada vrijedi $B_1B_2 \cap C_1C_2 = O_1$,
što povlači da su točke B_1 i B_2 (kao i točke C_1 i C_2) međusobno pridružene s obzirom na točku O_1.



slika 14

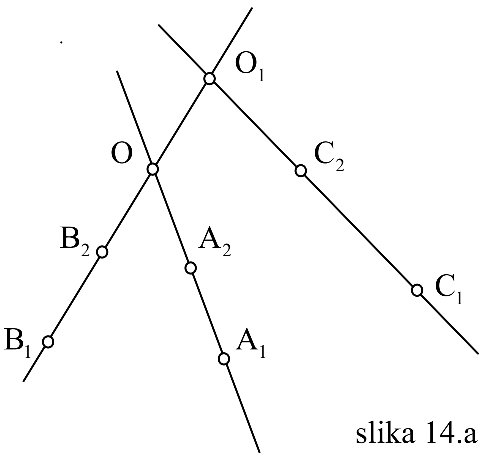
S druge strane iz $A_1A_2 \cap B_1B_2 = O$ proizlazi da su točke B_1 i B_2 međusobno pridružene i s obzirom na točku O, čime zaključujemo da je $O_1 = O$.

Naime ako bi točke O i O_1 bile različite, tada bi iz navedenog proizlazilo da su s obzirom na točku O_1 međusobno pridružene točke:

B_1 i B_2 ; C_1 i C_2 , ali isto tako i da je točka O pridružena sama sebi

(vidi sliku 14.a).

Uočimo da točka O ne može biti pridružena sama sebi jer ona nije incidentna s presječnim pravcem ravnina π_1 i π_2 .

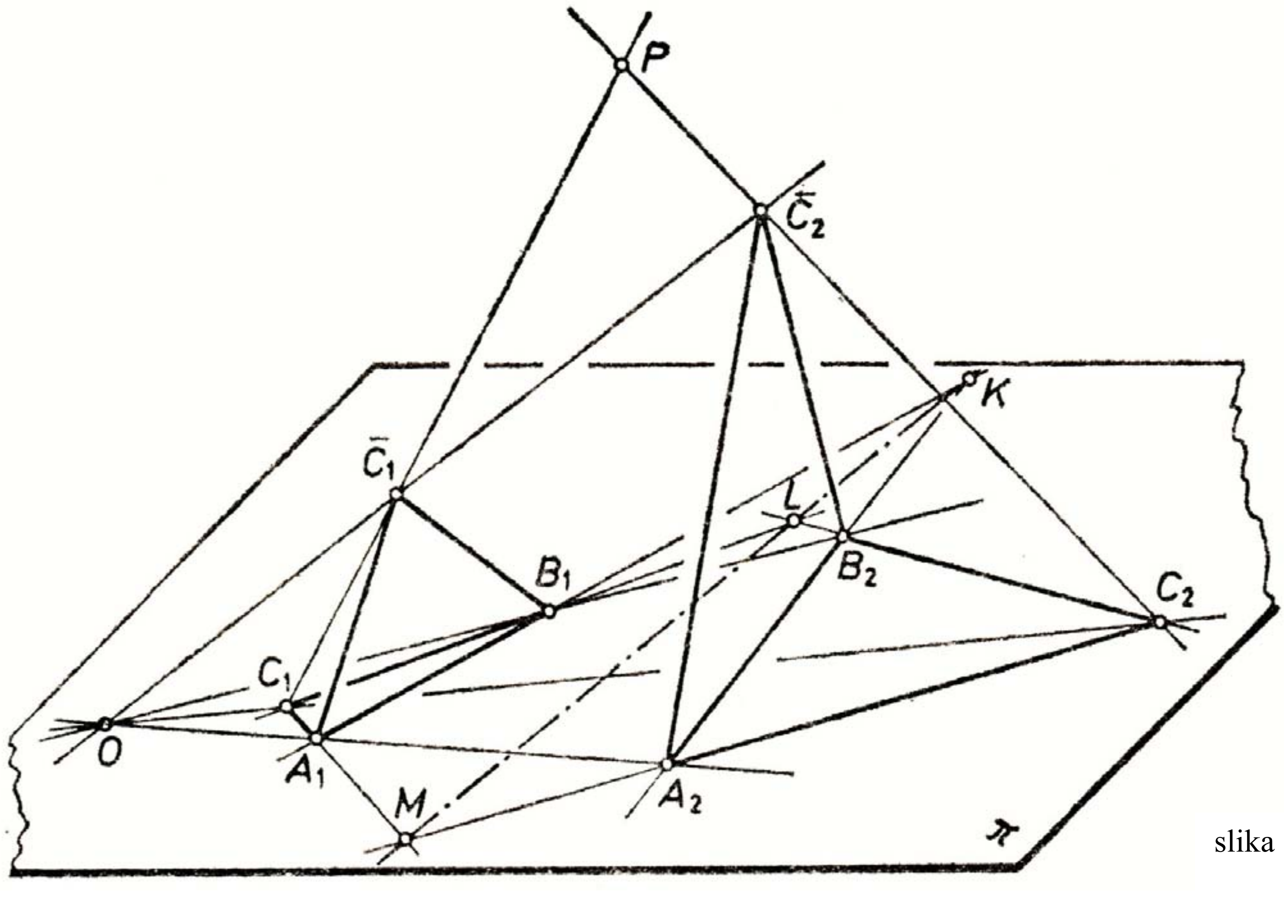


slika 14.a

✐ Samo one točke projektivnog prostora, koje su incidentne s presječnim pravcem (ravnina π_1 i π_2) su pridružene same sebi i to s obzirom na bilo koju točku koja nije incidentna s tim presječnim pravcem (vidi sliku 14).

Time dobivamo: $A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2 = O$, na temelju čega zaključujemo da su trovrsi $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ perspektivni s obzirom na točku O.

(*ii*) Pretpostavimo da trovrsi $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ leže u jednoj te istoj ravnini π (zadanoj nekolinearnim točkama A_1, B_1, C_1 ili ekvivalentno s nekolinearnim točkama A_2, B_2, C_2 – vidi teorem 1.2.3) projektivnog prostora i neka su oni perspektivni s obzirom na neku točku (centar) $O \in \pi$. Tada se spojnice A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 sijeku u točki O (vidi sliku 15).



slika 15

U ovom slučaju treba pokazati da je svaka Desarguesova figura u ravnini π ujedno projekcija neke Desarguesove figure u prostoru.

Konkretno u našem slučaju treba pokazati da su oba trovrha $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ u ravnini π projekcije nekih odgovarajućih trovrha, koji leže u pripadnim ravninama (projektivnog prostora) različitih od dane ravnine π.

Time će se dokaz pod (*ii*) pozivati na provedeni dokaz pod (*i*).

❖ U projektivnom prostoru odaberimo točku P (koja ne leži u ravnini π; primjena aksiom A6). Spojimo točku P s točkama C_1 i C_2 te na spojnici PC_1 odaberimo neku točku $\overline{C_1}$ različitu od P i C_1. Promatrajmo sada ravninu C_1PO.

Lako se vidi točke O i $\overline{C_1}$, kao i točke P i C_2 leže u ravnini C_1PO, stoga primjenom teorema 1.2.4 imamo da spojnice $O\overline{C_1}$ i PC_2 leže u ravnini C_1PO. Nadalje, primjenom teorema 1.1.2 imamo da sjecište: $\overline{C_2} = O\overline{C_1} \cap PC_2$ leži u ravnini C_1PO. Pritom je točka $\overline{C_2}$ različita od točaka P i C_2.
Iz rečenog proizlazi da trovrsi $A_1B_1\overline{C_1}$ i $A_2B_2\overline{C_2}$ leže u dvije međusobno različite ravnine, ali isto tako i različite od dane ravnine π.
Pritom se projekcijom trovrha $A_1B_1\overline{C_1}$ (iz neke ravnine π_1) dobiva trovrh $A_1B_1C_1$ u ravnini π te se analogno trovrh $A_2B_2C_2$ u ravnini π dobiva projekcijom trovrha $A_2B_2\overline{C_2}$ (iz neke ravnine π_2, gdje je $\pi_1 \neq \pi_2 \neq \pi$).

Uočimo da su trovrsi $A_1B_1\overline{C_1}$ i $A_2B_2\overline{C_2}$ (koji leže u dvije različite ravnine $\pi_1 \neq \pi_2$) perspektivni s obzirom na točku O, jer se spojnice A_1A_2, B_1B_2 i $\overline{C_1}\,\overline{C_2}$ sijeku u točki O (vidi sliku 15). Primijenimo li tvrdnju (*i*), zaključujemo da postoje tri kolinearne točke $\overline{K}$, $\overline{L}$ i $\overline{M}$ takve da je:

$$A_1B_1 \cap A_2B_2 = \overline{K}, \quad B_1\overline{C_1} \cap B_2\overline{C_2} = \overline{L}, \quad A_1\overline{C_1} \cap A_2\overline{C_2} = \overline{M}.$$

Primjenom tvrdnje (*i*) imamo da točke $\overline{K}$, $\overline{L}$ i $\overline{M}$ moraju ležati na presječnici ravnina π_1 i π_2 (tj. ravnina $A_1B_1\overline{C_1}$ i $A_2B_2\overline{C_2}$).

Projekcijom točaka $\overline{K}$, $\overline{L}$ i $\overline{M}$ na ravninu π dobivaju se točke K, L i M, koje su ujedno sjecišta projekcija pridruženih stranica, tj.

$$A_1B_1 \cap A_2B_2 = K, \quad B_1C_1 \cap B_2C_2 = L, \quad A_1C_1 \cap A_2C_2 = M.$$

Pritom iz kolinearnosti točaka $\overline{K}$, $\overline{L}$ i $\overline{M}$ proizlazi kolinearnost njihovih projekcija K, L i M.
Time je teorem dokazan.

Iz gore navedenog dokaza Desarguesovog teorema, vidimo da se Desarguesov teorem dokazuje u projektivnom prostoru kao operativnom prostoru.

Napomenimo da se Desarguesov teorem ne može dokazati u projektivnoj ravnini kao operativnom prostoru. Drugim rječima, za dokaz Desarguesovog teorema potrebno je primijeniti aksiome A1-A7.

Poznato je da ima mnogo projektivnih ravnina u kojima ne vrijedi Desarguesov teorem. Takve ravnine često se nazivaju jednim imenom *nedesarguesove ravnine*.
Najpoznatiji model takve projektivne ravnine otkrio je F. R. Moulton (više na vježbama).