7. Papusov teorem, teorem o perspektivitetu i temeljni teorem projektivne geometrije

U ovom odjeljku razmatraju se tri teorema: Papusov teorem, teorem o perspektivitetu i temeljni teorem projektivne geometrije.

Treba napomenuti da se nijedan od navedena tri teorema ne može dokazati samo primjenom aksioma A1-A5 projektivne ravnine, ali niti samo primjenom aksioma A1-A8 projektivnog prostora.

Međutim, ako jedan od navedena tri teorema promatramo kao aksiom, onda se pomoću njega i aksioma A1-A8 mogu dokazati preostala dva teorema u projektivnom prostoru. Također, ako taj aksiom uvedemo i u projektivnu ravninu (kao operativni prostor), onda se pomoću njega i aksioma A1-A5 mogu dokazati preostala dva teorema kao i Desarguesov teorem.

Time kažemo da su navedena tri teorema međusobno ekvivalentna.

Navedimo da je uobičajeno da se Papusov teorem uzima kao aksiom.

Prije nego li počmemo sa razmatranjem navedenog, podsjetimo se ravninske figure, koju smo nazvali običnim šesterovrhom (vidi definiciju 3.2).

Dakle, *običan šesterovrh* je ravninska figura $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ koja se sastoji od šest komplanarnih točaka (u određenom redoslijedu) od kojih po tri susjedne nisu kolinearne i od šest spojnica po dviju susjednih točaka, koje nazivamo stranicama tog običnog šesterovrha.

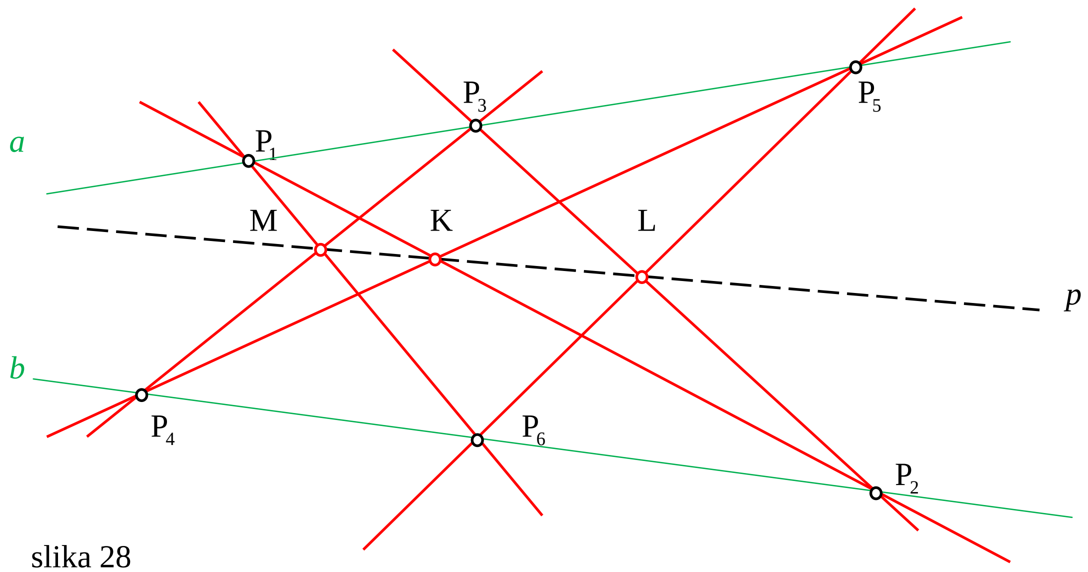
Parove stranica običnog šesterovrha

$$P_1P_2 \text{ i } P_4P_5 ; \qquad P_2P_3 \text{ i } P_5P_6 ; \qquad P_3P_4 \text{ i } P_6P_1$$

zovemo *parovima suprotnih stranica tog običnog šesterovrha*.

Aksiom A9 **(Papusov teorem)**

Ako vrhovi P_1, P_3 i P_5 običnog šesterovrha $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ leže na nekom prvcu a i ako vrhovi P_2, P_4 i P_6 tog šesterovrha leže na nekom prvcu b, onda sjecišta K, L i M parova suprotnih stranica tog običnog šesterovrha su kolinearne točke (slika 28).



slika 28

Ovako definiran obični šesterovrh zovemo ***Papusov šesterovrh***, a cijela figura se naziva ***Papusova figura***. Pravac *p* na kojemu leže sjecišta K, L i M parova suprotnih stranica zovemo ***Papusov pravac***.

Teorem 7.1   (Teorem o perspektivitetu)

Projektivitet dvaju komplanarnih nizova ujedno je i perspektivitet, ako i samo ako se sjecište nosilaca tih dvaju nizova tim projektivitetom preslikava na samog sebe.

Dokaz:

Primjenom definicije perspektiviteta (def. 4.1) imamo da su bilo koja dva projektivna niza (p_1) i (p_2) ujedno i perspektivna, ako se njihovi nosioci p_1 i p_2 sijeku te ako je njihovo sjecište pridruženo samo sebi.

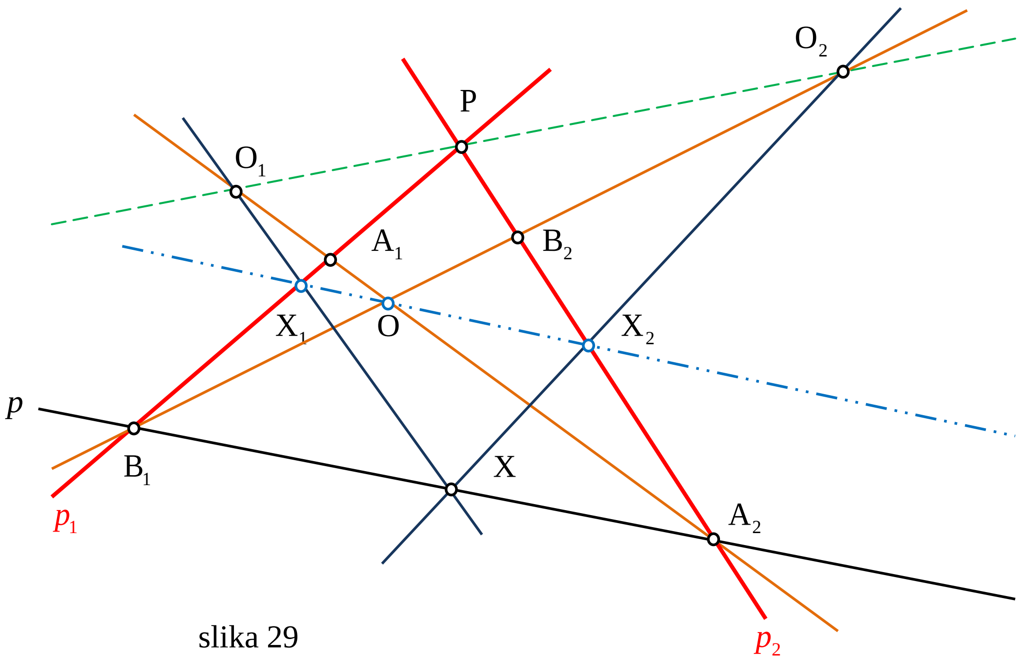
Prepostavimo da je sjecište $\mathrm{P} = p_1 \cap p_2$ nosilaca p_1 i p_2 pridruženo samo sebi.

Da bismo dokazali da je taj uvjet dovoljan, prikažimo projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$ kao lanac od dva perspektiviteta $(p_1)\overset{\mathrm{O}_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)\overset{\mathrm{O}_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$, odnosno neka je

$$(p_1)\overline{\wedge}(p_2)=(p_1)\overset{\mathrm{O}_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)\overset{\mathrm{O}_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2).$$

Pritom je pravac *p* nosioc (srednjeg) niza (p) odabran tako da siječe pravce p_1 i p_2, ali ne prolazi njihovim sjecištem $\mathrm{P} = p_1 \cap p_2$.

Da bi točka P bila pridružena sama sebi nužno je i dovoljno da centri perspektiviteta O_1 i O_2 budu kolinearni s točkom P – vidi sliku 29.



slika 29

Pritom se centar O_1 prvog perspektiviteta odabire proizvoljno na spojnici A_1A_2, gdje su A_1 i A_2 pridružene točke projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2) = (p_1)\overset{\underset{=}{O_1}}{\wedge}(p)\overset{\underset{=}{O_2}}{\wedge}(p_2)$ te je $A_2 = p \cap p_2$.

Nadalje, centar O_2 drugog perspektiviteta dobivamo kao sjecište pravaca O_1P i B_1B_2, gdje su B_1 i B_2 pridružene točke projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2) = (p_1)\overset{\underset{=}{O_1}}{\wedge}(p)\overset{\underset{=}{O_2}}{\wedge}(p_2)$ te je $B_1 = p_1 \cap p$.

Uočimo sada točku O, koja je sjecište pravaca A_1A_2 i B_1B_2.

Lako se može vidjeti da će projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p_2) = (p_1)\overset{\underset{=}{O_1}}{\wedge}(p)\overset{\underset{=}{O_2}}{\wedge}(p_2)$ biti ujedno i perspektivitet $(p_1)\overset{\underset{=}{O}}{\wedge}(p_2)$, jedino ako je centar tog perspektiviteta točka $O = A_1A_2 \cap B_1B_2$.

Pritom su A_1 i A_2, tj. B_1 i B_2 pridružene točke projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2) = (p_1)\overset{\underset{=}{O_1}}{\wedge}(p)\overset{\underset{=}{O_2}}{\wedge}(p_2)$ takve da je $A_2 = p \cap p_2$, $B_1 = p_1 \cap p$.

Odaberimo sada bilo koju točku X_1 niza (p_1) te ju iz centra O_1 projicirajmo na pravac p u točku X, a zatim točku X iz centra O_2 projicirajmo u točku X_2 na pravcu p_2.

Jasno, točke X_1 i X_2 su pridružene točke projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2) = (p_1)\overset{\underset{=}{O_1}}{\wedge}(p)\overset{\underset{=}{O_2}}{\wedge}(p_2)$.

S druge strane, ako je projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p_2) = (p_1)\overset{\underset{=}{O_1}}{\wedge}(p)\overset{\underset{=}{O_2}}{\wedge}(p_2)$ ujedno i perspektivitet $(p_1)\overset{\underset{=}{O}}{\wedge}(p_2)$, onda spojnica X_1X_2 mora prolaziti centrom $O = A_1A_2 \cap B_1B_2$ perspektiviteta $(p_1)\overset{\underset{=}{O}}{\wedge}(p_2)$. Dakle, treba dokazati kolinearnost točaka X_1, X_2 i O.

Usporedimo li sada dobivenu sliku 29 sa slikom 28, vidimo da smo na slici 29 dobili Papusovu figuru, pri čemu točke O_1, X, O_2, B_1, P, A_2 zajedno sa spojnicama po dviju susjednih točaka čine Papusov šesterovrh.

Primjenom Papusova teorema (tj. aksioma A9) zaključujemo da su točke X_1, O i X_2 kolinearne točke, čime je teorem dokazan.

Iz navedenog proizlazi da je za dokaz teorema o perspektivitetu uz aksiome A1-A8 potreban i Papusov teorem, kojeg tretiramo kao aksiom A9.

No, vrijedi i obratno. Naime, ako pretpostavimo da vrijedi teorem o perspektivitetu, onda su točke X_1, O i X_2 kolinearne (slika 29), čime direktno proizlazi valjanost Papusova teorema.

Drugim rječima, primjenom aksioma A1-A8 i teorema o perspektivitetu proizlazi valjanost Papusova teorema, na osnovu čega zaključujemo da su teorem o perspektivitetu i Papusov teorem ekvivalentani teoremi.

Komentar

Dualizacijom Papusova teorema (tj. aksioma A9) u projektivnoj ravnini dobiva se sljedeći teorem:

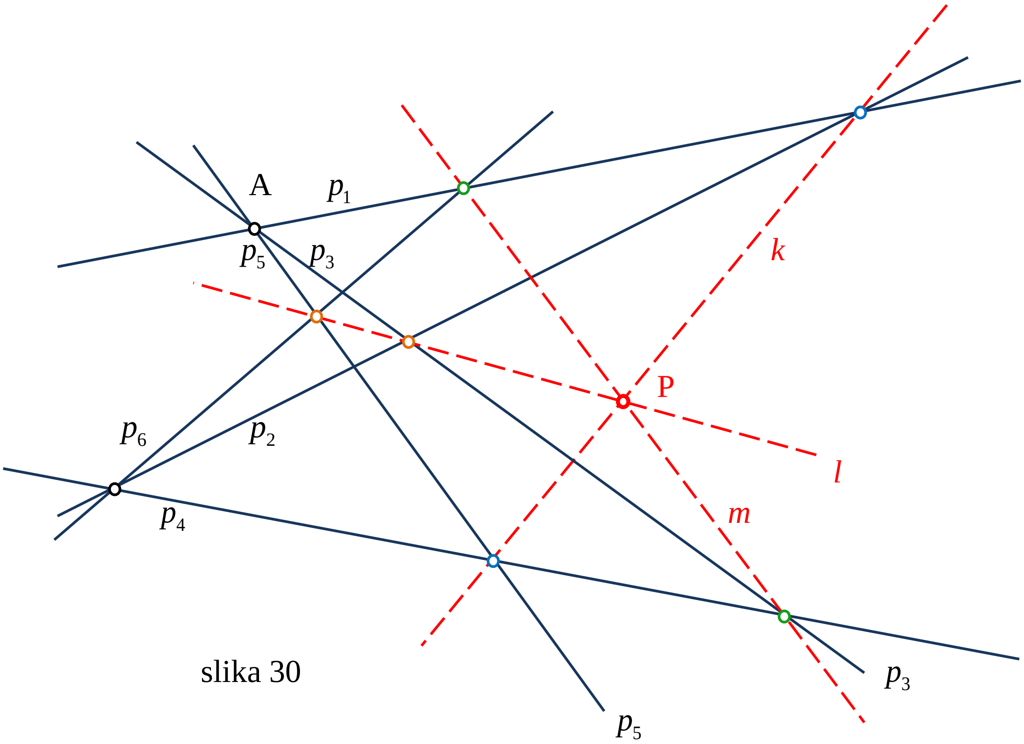
Neka je dano šest stranica p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 običnog šesterostrana, od kojih stranice p_1, p_3 i p_5 prolaze točkom A, a stranice p_2, p_4 i p_6 točkom B.

Tada spojnice k, l i m suprotnih vrhova tog običnog šesterostrana su konkruentni pravci (vidi sliku 30).

(Drugim rječima spojnice k, l i m suprotnih vrhova tog običnog šesterostrana prolaze jednom te istom točkom P).

Pritom se pod suprotnim vrhovima običnog šesterostrana $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ podrazumijevaju sljedeća sjecišta:

$$p_1 \cap p_2 \text{ i } p_4 \cap p_5; \qquad p_2 \cap p_3 \text{ i } p_5 \cap p_6; \qquad p_3 \cap p_4 \text{ i } p_6 \cap p_1$$



slika 30

Podsjetimo se, teoremom 6.8 pokazali smo da postoji barem jedan projektivitet koji tri po volji odabrane različite točke A_1, B_1 i C_1 pravca p_1 preslikava redom u tri po volji odabrane različite točke A_2, B_2 i C_2 pravca p_2. Sada ćemo dokazati da postoji točno jedan takav projektivitet.

Teorem 7.2 (Temeljni teorem projektivne geometrije)

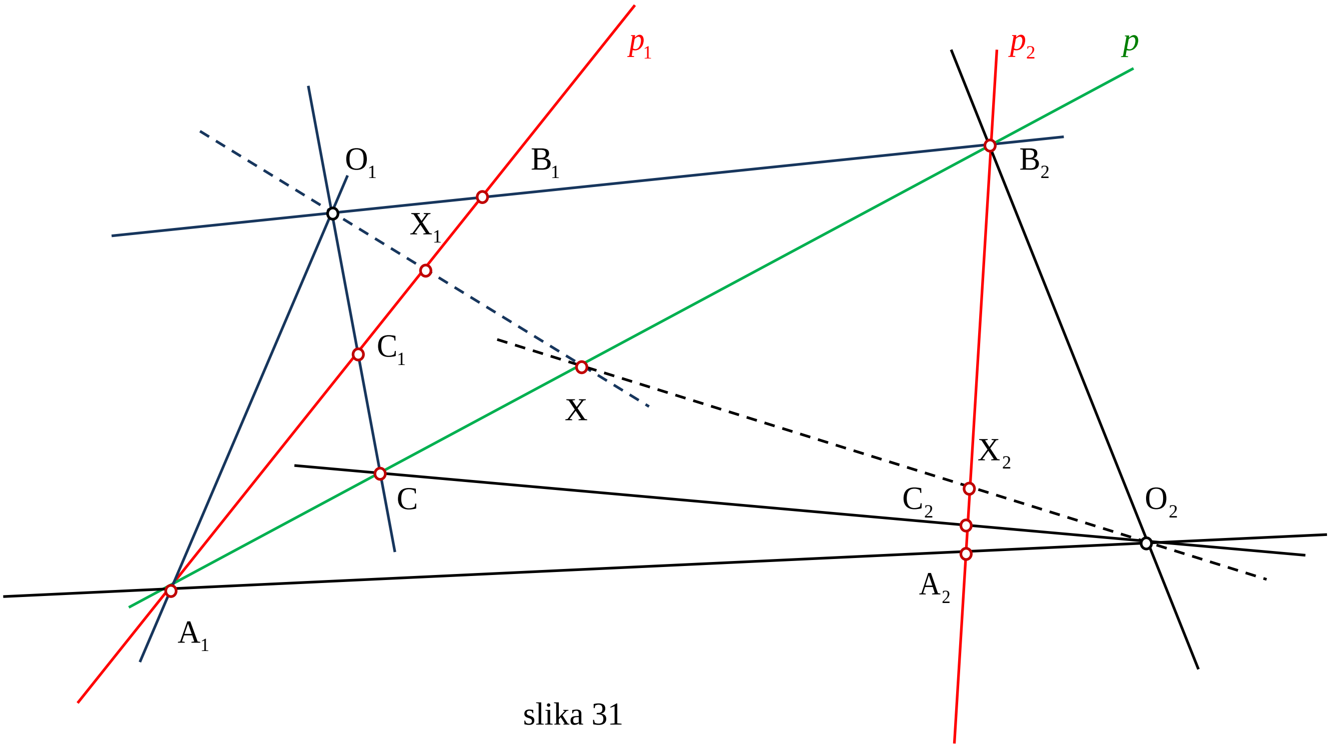
Postoji točno jedan projektivitet koji tri po volji odabrane različite točke A_1, B_1 i C_1 pravca p_1 preslikava redom u tri po volji odabrane različite točke A_2, B_2 i C_2 pravca p_2.

Dokaz:

Neka su dana dva različita pravca p_1 i p_2 (koji mogu biti komplanarni ili nekomplanarni) te na svakom od njih odaberimo po tri različite točke A_1, B_1 i C_1, odnosno A_2, B_2 i C_2.

Nadalje, konstruirajmo projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)=(p_1)\stackrel{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)\stackrel{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$ (kojeg prikazujemo lancem od dva perspektiviteta), kojim se točke A_1, B_1 i C_1 niza (p_1) prevode u točke A_2, B_2 i C_2 niza (p_2).

Pritom smo u lancu perspektiviteta $(p_1)\stackrel{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)\stackrel{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$ odabrali niz (p), takav da mu je nosioc p jednak spojnici A_1B_2 (vidi sliku 31).



slika 31

Dakle, na slici 31 prikazali smo projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)=(p_1)\stackrel{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)\stackrel{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$,

koji možemo zapisati u obliku $(A_1,B_1,C_1)\overline{\wedge}(A_2,B_2,C_2)=(A_1,B_1,C_1)\stackrel{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(A_1,B_2,C)\stackrel{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(A_2,B_2,C_2)$.

Sada lako možemo vidjeti da se pomoću gore navedenog lanca od dva perspektiviteta bilo koja točka X_1 niza (p_1) prevodi u točku X niza (p), koja se potom prevodi u točku X_2 niza (p_2).

Drugim riječima, X_1, X_2 je par pridruženih točaka projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$ realiziranog lancem od dva perspektiviteta $(p_1)\overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)\overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$.

Primjenom leme 6.5 imamo da se projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$ može prikazati nekim drugim lancem od dva perspektiviteta, kojim će također točke A_1, B_1 i C_1 niza (p_1) prevoditi u točke A_2, B_2 i C_2 niza (p_2). Time možemo pisati:

$$(p_1)\overline{\wedge}(p_2)=(p_1)\overset{\overline{O_1}}{\overline{\overline{\wedge}}}(\overline{p})\overset{\overline{O_2}}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2), \qquad \text{gdje je} \quad \overline{p}\neq p,$$

pri čemu pravac $\overline{p}$ nije spojnica para pridruženih točaka projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$ i ne prolazi točkom $p_1\cap p_2$.

Pritom se danim lancem od dva perspektiviteta $(p_1)\overset{\overline{O_1}}{\overline{\overline{\wedge}}}(\overline{p})\overset{\overline{O_2}}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$ točka X_1 niza (p_1) preslikava u točku $\overline{X}$ niza $(\overline{p})$, koja se potom prevodi u točku $\overline{X_2}$ niza (p_2). Time dobivamo da je X_1, $\overline{X_2}$ također par pridruženih točaka projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$ koji je realiziran lancem $(p_1)\overset{\overline{O_1}}{\overline{\overline{\wedge}}}(\overline{p})\overset{\overline{O_2}}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$.

- Teorem 7.2 će vrijediti ako pokažemo da je točka $\overline{X_2}$ upravo jednaka točki X_2.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka se točke $\overline{X_2}$ i X_2 različite.

Primijetimo da točke A_1 i A_2 čine par pridruženih točaka projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$, ali isto tako i perspektiviteta $(p)\overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$ s centrom u točki O_2, stoga ako projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$ proširimo perspektivitetom $(p_2)\overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)$ dobivamo sljedeći projektivitet:

$$(p_1)\overline{\wedge}(p)=(p_1)\overset{\overline{O_1}}{\overline{\overline{\wedge}}}(\overline{p})\overset{\overline{O_2}}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)\overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)$$

kojim se točka A_1 niza (p_1) preslikava u samu sebe. Time je točka A_1 fiksna točka projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p)$, pri čemu je $A_1=p_1\cap p$. Primjenom teorema 7.1 (teorema o perspektivitetu) zaključujemo da je projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p)$ ujedno i perspektivitet i to upravo perspektivitet $(p_1)\overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)$ (zbog početne pretpostavke), tj. dobivamo $(p_1)\overline{\wedge}(p)=(p_1)\overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)$.

Uočimo da su točke X_1 niza (p_1) i X niza (p) pridružene točke perspektiviteta $(p_1)\overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)$, ali isto tako i projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p)$.

S druge strane, ako ponovo promatramo projektivitet

$$(p_1)\overline{\wedge}(p) = \underbrace{(p_1)\overset{\overline{O_1}}{\overline{\overline{\wedge}}}(\overline{p})\overset{\overline{O_2}}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)}_{=(p_1)\overline{\wedge}(p_2)}\overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p) = (p_1)\overline{\wedge}(p_2)\overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p),$$

koji se prikazuje lancem projektiviteta $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$ i perspektiviteta $(p_2)\overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p)$, onda imamo da je s obzirom na perspektivitet $(p)\overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}}(p_2)$ točka X niza (p) pridružena točki X_2 niza (p_2), ali isto tako da je s obzirom na projektivitet $(p_1)\overline{\wedge}(p_2)$ točka X_1 niza (p_1) pridružena točki $\overline{X_2}$ niza (p_2), odakle direktno proizlazi: $\overline{X_2} = X_2$.

Time je temeljni teorem projektivne geometrije dokazan.

Komentar

Napomenimo još jednom, Papusov teorem, kao ni teorem o perspektivitetu, a isto tako ni temeljni teorem projektivne geometrije ne može se dokazati u projektivnom prostoru koristeći samo aksiome A1-A8 pa i ako uz te aksiome vrijedi i Desarguesov teorem. Analogno i u projektivnoj ravnini, kao operatvnom prostoru, navedena tri teorema ne mogu se dokazati samo primjenom aksioma A1-A5 ni ako njima dodamo Desarguesov teorem kao aksiom. Kao dokaz te tvrdnje koristi se činjenica da su poznati modeli projektivnog prostora, a isto tako i modeli projektivne ravnine u kojima vrijedi Desarguesov teorem, ali ne vrijedi Papusov teorem.

Podsjetimo se, u četvrtom poglavlju smo pokazali da se Desarguesov teorem može dokazati jedino u projektivnom prostoru kao operativnom prostoru, pri čemu se koriste aksiomi A1-A8.

Naime, u projektivnoj ravnini kao operativnom prostoru, samo primjenom aksioma A1-A5 ne može se dokazati Desarguesov teorem.

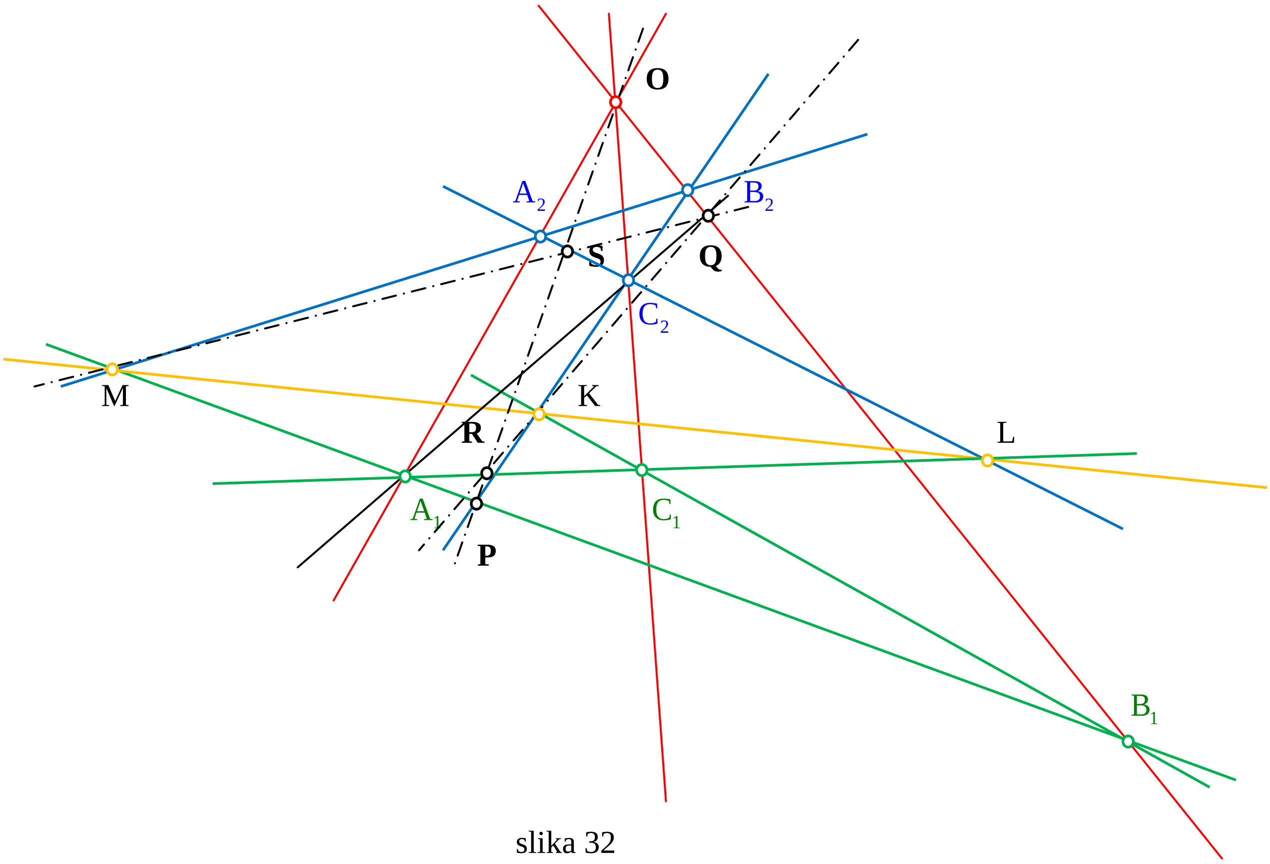
Međutim, ako u projektivnoj ravnini kao operativnom prostoru uz aksiome A1-A5 pretpostavimo da vrijedi i Papusov teorem kao aksiom (A9), onda se može dokazati valjanost Desarguesova teorema. Hessenberg je to 1905. g. prvi i dokazao.

- Slijedi dokaz Desarguesova teorema projektivne ravnine pomoću Papusova teorema:

Pretpostavimo da u projektivnoj ravnini kao operativnom prostoru uz aksiome A1-A5 vrijedi Papusov teorem. Nadalje, neka su u promatranoj projektivnoj ravnini dana dva trovrha $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, koja su perspektivna s obzirom na neki centar (tj. točku) O.

Ako je točka K sjecište pridruženih stranica B_1C_1 i B_2C_2, tj. $K = B_1C_1 \cap B_2C_2$,
točka L sjecište pridruženih stranica C_1A_1 i C_2A_2, tj. $L = C_1A_1 \cap C_2A_2$,
točka M sjecište pridruženih stranica A_1B_1 i A_2B_2, tj. $M = A_1B_1 \cap A_2B_2$,

onda prema izreci Desarguesova teorema treba dokazati da su točke K, L i M tri kolinearne točke.



slika 32

Nadopunimo sliku 32, koja se sastoji od dva perspektivna trovrha $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ s obzirom na točku O i odgovarajućih sjecišta: $K = B_1C_1 \cap B_2C_2$, $L = C_1A_1 \cap C_2A_2$, $M = A_1B_1 \cap A_2B_2$, sljedećim točkama:

$$P = A_1B_1 \cap B_2C_2, \quad Q = A_1C_2 \cap OB_1, \quad R = A_1C_1 \cap OP, \quad S = A_2C_2 \cap OP.$$

Time se dobivaju sljedeći Papusovi šesterovrsi:

- $C_1B_1OPC_2A_1$, stoga primjenom Papusova teorema (aksioma) imamo da su sjecišta parova suprotnih stranica $K = C_1B_1 \cap PC_2$, $Q = B_1O \cap C_2A_1$, $R = OP \cap A_1C_1$ kolinearne točke.

- $A_2B_2OPA_1C_2$, stoga primjenom Papusova teorema (aksioma) slijedi da su sjecišta parova suprotnih stranica $M = A_2B_2 \cap PA_1$, $Q = B_2O \cap A_1C_2$, $S = OP \cap C_2A_2$ kolinearne točke.

- C_2PA_1RQS pa primjenom Papusova teorema slijedi da su sjecišta parova suprotnih stranica $K = C_2P \cap RQ$, $M = PA_1 \cap QS$, $L = A_1R \cap SC_2$ kolinearne točke.
  Pritom se koristila gore dokazana kolinearnost točaka K, Q i R, odnosno M, Q i S.

Time je dokaz gotov.