9. Dvodimenzionalni projektiviteti (projektivne transformacije ravnine)

U ovom odjeljku će se pokazati da jednodimenzionalni projektivitet $\left(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\right)\overline{\wedge}\left(\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}'\right)$ (dva kolokalna niza točaka) ima dva različita analogona u dvije dimenzije:

- jedan koji pridružuje točke točkama i pravce pravcima i
- drugi koji pridružuje točke pravcima i pravce točkama.

Nazive ***kolineacija i korelacija*** za ta preslikavanja uveo je Möbius 1827. godine.

Definicija 9.1

Kolineacija je preslikavanje kojim se točke preslikavaju na točke i pravci se preslikavaju na pravce, pri čemu je sačuvana relacija incidencije.

Time imamo da se kolineacijom nizovi točaka preslikavaju na nizove točaka te se prameni pravaca preslikavaju na pramene pravaca.

Isto tako se kolineacijom četverovrsi preslikavaju na četverovrhe, četverostrani na četverostrane itd. Pojam kolineacije je dualan sam sebi, jer je inverzno preslikavanje također kolineacija, a produkt dviju kolineacija je opet kolineacija.

Definicija 9.2

Projektivna kolineacija je kolineacija koja transformira niz točaka ili pramen pravaca projektivno tako da ona preslikava točke X pravca x na točke X' pridruženog pravca x'.

Relacija među točkama X i X' je projektivitet $\mathrm{X}\overline{\wedge}\mathrm{X}'$ (kojim se točka X preslikava na točku X').

Teorem 9.3

Svaka kolineacija koja projektivno preslikava jedan niz točaka je projektivna kolineacija.

Teorem 9.4

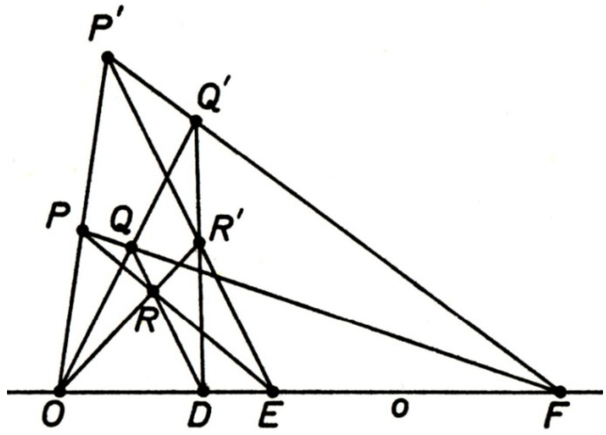
Neka su dana dva potpuna četverovrha (ili dva potpuna četverostrana).

Tada postoji točno jedna projektivna kolineacija koja preslikava jedan potpuni četverovrh na drugi (ili jedan potpuni četverostran na drugi).

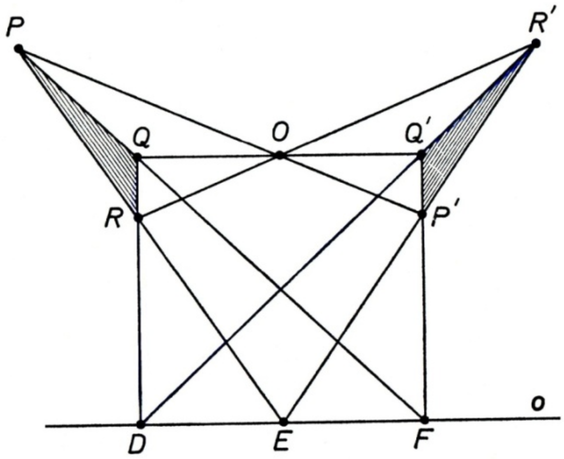
Komentar 9.5

Podsjetimo se Desarguesovog teorema: ako su dva trovrha PQR i P'Q'R' perspektivna s obzirom na neki centar (tj. točku) O, onda su oni perspektivni i s obzirom na neki pravac (tj. os) o i obratno.

Drugim riječima vrijedi: $\mathrm{PQR}\overset{\mathrm{O}}{\overline{\overline{\wedge}}}\mathrm{P'Q'R'} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{PQR}\overset{o}{\overline{\overline{\wedge}}}\mathrm{P'Q'R'}$.



slika 36.a



slika 36.b

> ➢ Iz navedenog proizlazi da dana kolineacija pridružuje dva perspektivna trovrha, stoga se ona još naziva ***perspektivnom kolineaciiom.***

Dakle, neka su dva trovrha PQR i P'Q'R' perspektivna s obzirom na neki centar O.

Tada primjenom teorema 9.4 postoji točno jedna projektivna kolineacija koja preslikava četverovrh DEPQ u DEP'Q' (vidi slike 36.a, 36.b).

Ta kolineacija preslikava

- pravac $o = \mathrm{DE}$ na sebe,
- pravac PQ na P'Q', a
- točku $\mathrm{F} = o \cap \mathrm{PQ} = o \cap \mathrm{P'Q'}$ ostavlja invarijantnom.

Invarijantna točka F leži na pravcu DE, (kojemu su D i E invarijantne točke), stoga je svaka točka pravca $o = \mathrm{DE}$ invarijantna, odnosno pravac o je invarijantan.

Komentar:

- Koristili smo prethodno navedeno (što se smatra aksiomom): ako neki projektivitet na pravcu ima tri različite invarijantne točke, onda je svaka točka tog pravca invarijantna, tj. taj je pravac invarijantan, tj. identiteta (str. 57).

S druge strane, imamo da su spojnice (pridruženih točaka) PP' i QQ' invarijantni pravci (te kolineacije, jer sijeku pravac *o* u pripadnoj invarijantnoj točki), stoga je i sjecište O invarijantnih pravaca PP' i QQ' invarijantna točka.

Nadalje točka $\mathrm{R} = \mathrm{DQ} \cap \mathrm{EP}$ se preslikava u točku $\mathrm{R'} = \mathrm{DQ'} \cap \mathrm{EP'}$, stoga (prema dualu aksioma, gore navedenog u komentaru) imamo da je svaki pravac koji prolazi invarijantnom točkom O invarijantan pravac (time je pravac RR' invarijantan).

Točka O i pravac *o* se s obzirom na koje su ta dva trovrha (PQR i P'Q'R') perspektivna zove se ***centar i os te perspektivne kolineacije***.

Ako centar O i os *o* nisu incidentni (kao što je prikazano na slici 36.b), onda tu perspektivnu kolineaciju nazivamo ***homologijom***, a ako su incidentni (kao što je prikazano na slici 36.a), onda ju nazivamo ***elacijom***.

Iz rečenog proizlazi da je homologija takva projektivna transformacija ravnine kod koje spojnica svakog para pridruženih točaka prolazi jednom fiksnom (invarijantnom) točkom O, koju nazivamo centrom homologije, a sjecišta svakog para pridruženih pravaca leže na jednom fiksnom (invarijantnom) pravcu *o*, koji nazivamo os homologije.

Pritom centar i os homologije ne smiju biti incidentni.

Izrecimo neke teoreme (bez dokaza) vezane za homologiju i elaciju.

Prije toga resumirajmo gore navedeno.

- Za bilo koja dva perspektivna trovrha PQR i P'Q'R' postoji perspektivna kolineacija koja preslikava jedan u drugi. Tu perspektivnu kolineaciju zovemo elacijom ili homoligijom već prema tome da li su centar i os incidentni ili nisu incidentni.

Teorem 9.6

Homologija je određena centrom, osi i jednim parom pridruženih točaka.

Pritom je taj par pridruženih točaka kolinearan s centrom homologije.

Teorem 9.7

Elacija je određena s osi i jednim parom pridruženih točaka.

Teorem 9.8

Kolineacija koja ima točno jedan niz invarijantnih točaka je perspektivna kolineacija.

Teorem 9.9

Ako neka kolineacija ima niz invarijantnih točaka, onda ona ima i pramen invarijantnih pravaca.

Teorem 9.10

Sve invarijantne točke neke elacije leže na njenoj osi.

Teorem 9.11

Centar homologije je jedina invarijantna točka koja ne leži na njenoj osi.

- Promatrajmo sada projektivne korelacije.

Definicija 9.12

Korelacija je preslikavanje kojim se

- skup svih točaka ravnine preslikava na skup svih pravaca te iste ravnine i
- skup svih pravaca ravnine preslikava na skup svih točaka te ravnine

pri čemu je sačuvana relacija incidencije.

Dakle, za danu korelaciju imamo da je slika točke uvijek pravac i dualno da je slika pravca uvijek točka (za razliku od kolineacije, gdje je slika točke uvijek točka i slika pravca je uvijek pravac).

Time imamo da se korelacijom nizovi točaka preslikavaju na pramenove pravaca, a pramenovi pravaca na nizove točaka, stoga se korelacijom četverovrsi preslikavaju na četverostrane i četverostrani na četverovhe, itd.

Pojam korelacije je dualan sam sebi, jer je inverz korelacije opet korelacija, a produkt dviju korelacija je korelacija.

Definicija 9.13

Projektivna korelacija je korelacija koja transformira niz točaka ili pramen pravaca projektivno tako da ona preslikava točke X pravca y na pravce x' koji prolaze pridruženom točkom X'.

Relacija između točke X i pravca x' je projektivitet $\mathrm{X} \overline{\wedge} x'$ (kojim se točka X preslikava na pravac x').

Sada možemo izreći teoreme dualne teoremima 9.3 i 9.4

Teorem 9.14

Svaka korelacija koja projektivno preslikava jedan niz točaka je projektivna korelacija.

Teorem 9.15

Postoji točno jedna projektivna korelacija koja preslikava četiri vrha jednog potpunog četverovrha na četiri stranice jednog potpunog četverostrana u izvjesnom redoslijedu.
(Podrazumijeva se da su vrhovi četverovrha PQRS u suglasnosti sa stranicama četverostrana *pqrs*).

Napomena:

Detaljniji prikaz gore navedenog te dokaze teorema pogledati u literaturi: Coxeter, Projektivna geometrija, Školska knjiga, Zagreb).

ANALITIČKI PRISTUP PROJEKTIVNE TRANSFORMACIJE RAVNINE

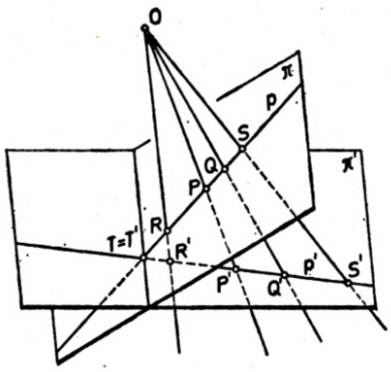
Prije nego li detaljnije proučimo analitički pristup projektivne transformacije ravnine, podsjetimo se kako se definira perspektivitet i projektivitet dviju ravnina te kako glasi temeljni teorem projektivne geometrije ravnine (vidi dodatak 9.16).

Dodatak 9.16

- Neka su π i π' dvije ravnine smještene u projektivnom prostoru, pri čemu je moguće da je $\pi = \pi'$.

Kažemo da su ***dvije ravnine*** π i π' ***perspektivne s obzirom na neku čvrstu (fiksnu) točku*** O ako postoji jednoznačno obostrano preslikavanje skupa točaka ravnine π i skupa točaka ravnine π' takvo da spojnice parova pridruženih točaka prolaze točkom O projektivnog (trodimenzionalnog) prostora. Pritom točka O je bilo koja točka prostora koja ne leži u ravnini π ali ni u ravnini π'.

Perspektivne ravnine π i π' su presječne ravnine jednog te istog snopa pravaca (O).



Obostrano jednoznačno preslikavanje skupa točaka projektivne ravnine π na skup točaka ravnine π' je ***projektivitet*** ako ga možemo ostvariti pomoću lanca od konačno mnogo perspektiviteta.

Dakle, kažemo da postoji projektivitet ravnina π i π' i označavamo ga sa $(\pi)\overline{\wedge}(\pi')$ ako postoji lanac $(\pi)\overset{\underline{\underline{O_1}}}{\wedge}(\pi_1)\overset{\underline{\underline{O_2}}}{\wedge}(\pi_2)\overset{\underline{\underline{O_3}}}{\wedge}\cdots\overset{\underline{\underline{O'}}}{\wedge}(\pi')$ od konačno mnogo perspektiviteta takav da je:

$$(\pi)\overline{\wedge}(\pi')=(\pi)\overset{\underline{\underline{O_1}}}{\wedge}(\pi_1)\overset{\underline{\underline{O_2}}}{\wedge}(\pi_2)\overset{\underline{\underline{O_3}}}{\wedge}\cdots\overset{\underline{\underline{O'}}}{\wedge}(\pi').$$

Temeljni teorem projektivne geometrije ravnine

Postoji točno jedan projektivitet ravnina π i π' koji prevodi (preslikava) četiri po volji odabrane točke A_0, A_1, A_2, E ravnine π u četiri po volji odabrane točke A'_0, A'_1, A'_2, E' ravnine π'.

Pritom za dane točke jedne i druge četvorke vrijedi da po tri nisu kolinearne.

Tvrdnja teorema vrijedi i u slučaju da se ravnine π i π' preklapaju, tj. ako je $\pi = \pi'$.

- U nastavku će se kao operativni prostor promatrati jedna jedina realna ravnina π.
  Time će se pod projektivnim transformacijama ravnine π podrazumijevati projektivna preslikavanja te ravnine π na samu sebe.

- Neka je u promatranoj projektivnoj ravnini π zadan koordinatni sustav osnovnim točkama A_0, A_1 i A_2 i jediničnom točkom E. Pritom nikoje tri od tih četiriju točaka nisu kolinearne. Tada svakoj točki $X(x_0, x_1, x_2)$ te ravnine odgovara klasa uređenih trojki realnih brojeva $\lambda \cdot (x_0, x_1, x_2)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, osim trojke $(0,0,0)$.

  Pritom se točka $X(x_0, x_1, x_2)$ realne ravnine π može predstaviti koordinatnom matricom oblika

$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, čiji su elementi x_0, x_1, x_2 realni brojevi, koji nisu istodobno svi jednaki nuli.

Uočiti da matrice X i $\lambda \cdot X$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ predstavljaju jednu te istu točku $X(x_0, x_1, x_2)$.

Teorem 9.17

Ako je X koordinatna matrica neke točke projektivne ravnine, uz zadani koordinatni sustav (osnovnim točkama A_0, A_1, A_2 i jediničnom točkom E), onda je koordinatna matrica X' te iste točke u nekom drugom koordinatnom sustavu dana sa:

$$X' = \mathbf{A} \cdot X, \quad |\mathbf{A}| \neq 0, \tag{27}$$

gdje su stupci kvadratne matrice $\mathbf{A}$ trećeg reda koordinatne matrice $A_i = \begin{pmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \end{pmatrix}$, $i = 0,1,2$ osnovnih točaka A_0, A_1, A_2 polaznog koordinatnog sustava u novom sustavu.

Primijetimo da iz početnog uvjeta nekolinearnosti osnovnih točaka A_i, $i = 0,1,2$ proizlazi da je $\mathbf{A}$ regularna matrica, tj. $|\mathbf{A}| \neq 0$, gdje je $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A}$.

Prijelazom na novi koordinatni sustav koordinate točaka projektivne ravnine mijenjaju se linearnom transormacijom koordinata, dane sa (27).

Matrica $\mathbf{A}$ se naziva <u>*matrica prijelaza*</u> na novi koordinatni sustav.

Dokaz: sami – vidi literaturu:

D. Palman, Projektivna geometrija, Školska knjiga, Zagreb, str. 117-119.

Definicija 9.18

Točku projektivne ravnine koju neka projektivna transformacija (tj. projektivitet) preslikava na samu sebe zovemo ***invarijantnom ili fiksnom točkom*** te projektivne transformacije (projektiviteta).

Projektivnu transformaciju (tj. projektivitet) kod koje je svaka točka invarijantna (fiksna) zovemo ***identičnom projektivnom transformacijom ili identitetom***.

Identična projektivna transformacija (tj. identiteta) predstavljena je klasom $\lambda \cdot E$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdje je E jedinična matrica trećeg reda.

Komentar 9.19

U nekom koordinatnom sustavu (danom osnovnim točkama A_0, A_1 i A_2 i jediničnom točkom E) projektivne ravnine koordinate x_0, x_1, x_2 točaka koje leže na nekom pravcu zadovoljavaju linearnu jednadžbu

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{2} u_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{i}} = 0 \tag{28}$$

i obrnuto. Pritom trojka koeficijenata u_0, u_1, u_2 predstavlja koordinate tog pravca, stoga je jednostupčana matrica $\mathrm{U} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ koordinatna matrica tog pravca.

Dakle, imamo da se jednadžba tog pravca, tj. jednadžba (28) može prikazati u matričnom obliku sa:

$$\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{X} = 0. \tag{29}$$

Analogno razmatranjima (provedenim na str. 67) u projektivnoj ravnini π može se definirati koordinatni sustav polja pravaca tako da se pravci $\mathrm{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ uzmu kao osnovni elementi koordinatnog sustava polja pravaca.

Uzimajući u obzir jednadžbu pravca (28), lako se može vidjeti da osnovni pravci p_{i}, $\mathrm{i} = 0,1,2$ odgovaraju sljedećim spojnicama: $\mathrm{p}_0 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{p}_1 = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_2$, $\mathrm{p}_2 = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$ osnovnih točaka $\mathrm{A}_0(1,0,0)$, $\mathrm{A}_1(0,1,0)$ i $\mathrm{A}_2(0,0,1)$, kojima su $\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ odgovarajuće koordinatne matrice. Pritom jedinični pravac $\mathrm{f} = \mathrm{p}_0 + \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$ ima jednadžbu $x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

- Promatrajmo sada projektivnu ravninu kao nosioc polja točaka i zadajmo neku projektivnu transformaciju tog polja točaka.

Iz prethodnih razmatranja poznato nam je da se niz točaka (p) projektivnom transformacijom polja točaka preslikava ponovo u niz točaka (p'). Prema tome, možemo reći da dana projektivna transformacija polja točaka preslikava pravac *p* kao nosioca niza točaka (p) na pravac *p'* kao nosioca niza točaka (p'), stoga kažemo da dana <u>projektivna transformacija polja točaka (kolineacija) inducira jednu projektivnu transformaciju polja pravaca (kolineacija)</u> promatrane projektivne ravnine.

Neka je projektivna transformacija polja točaka dana sa (27), odnosno

$$\mathrm{X}' = \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}, \quad |\mathbf{A}| \neq 0.$$

Tada ta projektivna transformacija inducira jednu projektivnu transformaciju polja pravaca sa

$$\mathrm{U}' = \mathbf{A}^* \cdot \mathrm{U}, \tag{30}$$

gdje je matrica $\mathbf{A}^* = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ <u>**kontragredijentna matrica**</u> matrici $\mathbf{A}$.

U nastavku će se promatrati preslikavanja polja točaka neke projektivne ravnine na polje pravaca te iste ravnine i obratno preslikavanja polja pravaca na polje točaka te projektivne ravnine (korelacije).

Dakle, neka je dana matrična jednadžba

$$\mathrm{U}' = \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}, \quad |\mathbf{A}| \neq 0, \tag{31}$$

gdje je: $\mathbf{A}$ nesingularna matrica trećeg reda,

X je jednostupčana koordinatna matrica neke točke promatrane projektivne ravnine,

U' je jednostupčana koordinatna matrica nekog pravca te iste projektivne ravnine.

Napomena

Slučaj kada se ne promatra jedna projektivna ravnina kao operativni prostor.

Neka je dano preslikavanje neke projektivne ravnine π na neku projektivnu ravninu π' (gdje su π i π' smještene u projektivnom prostoru) takvo da se polje točaka (pravaca) projektivne ravnine π preslika na polje pravaca (točaka) ravnine π'.

Tada bi s obzirom na jednadžbu (31) imali da je:

X jednostupčana koordinatna matrica neke točke projektivne ravnine π te da je

U' jednostupčana koordinatna matrica nekog pravca projektivne ravnine π'.

U našem slučaju kada se promatra jedna projektivna ravnina kao operativni prostor imamo da jednadžba (31) predstavlja jedno preslikavanje polja točaka neke projektivne ravnine na polje pravaca te iste projektivne ravnine.

Lema 9.20

Niz točaka preslikava se sa (31) u pramen pravaca.

Dokaz:

Neka je niz točaka (p) dan u parametarskom obliku sa

$$(p) \ \ldots \quad \lambda_0 \mathrm{X}_0 + \lambda_1 \mathrm{X}_1 \tag{32}$$

gdje su X_0 i X_1 osnovne točke tog niza kojemu je nosioc pravac *p*, tj. spojnica $\mathrm{X}_0\mathrm{X}_1$.

Tada koristeći (31) nekoj točki niza (p) sa parametrima λ_0 i λ_0 odgovara pravac

$$\mathrm{U}' = \mathbf{A} \cdot (\lambda_0 \mathrm{X}_0 + \lambda_1 \mathrm{X}_1)$$

ili

$$\mathrm{U}' = \lambda_0 \mathbf{A} \mathrm{X}_0 + \lambda_1 \mathbf{A} \mathrm{X}_1,$$

odakle je

$$\mathrm{U}' = \lambda_0 \mathrm{U}'_0 + \lambda_1 \mathrm{U}'_1, \tag{33}$$

što je očito pramen pravaca (P) s vrhom u nekoj točki P (što dokazuje lemu).

Pritom se koristila jednadžba (31), kojom imamo da slika točke X_0, odnosno X_1 je pravac

$$\mathrm{U}'_0 = \mathbf{A} \mathrm{X}_0, \quad \text{odnosno} \quad \mathrm{U}'_1 = \mathbf{A} \mathrm{X}_1.$$

Promatrajmo sada preslikavanje polja pravaca neke projektivne ravnine na polje točaka te iste projektivne ravnine. U ovom slučaju imamo matričnu jednadžbu

$$X' = \mathbf{A}^{*} \cdot U, \quad |\mathbf{A}| \neq 0, \qquad (34)$$

gdje je matrica $\mathbf{A}^{*} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$ **kontragredijentna matrica** matrici $\mathbf{A}$.
U je jednostupčana koordinatna matrica nekog pravca promatrane projektivne ravnine,

X je jednostupčana koordinatna matrica neke točke te iste projektivne ravnine.

Definicija 9.21

Preslikavanje definirano jednadžbom

$$\rho U' = \mathbf{A} \cdot X, \quad |\mathbf{A}| \neq 0,$$
$$\rho X' = \mathbf{A}^{*} \cdot U$$

zovemo korelacijom projektivne ravnine.

Takvo preslikavanje preslikava skup *S* (kao uniju skupa točaka i skupa pravaca neke projektivne ravnine) na sebe tako da je slika točke uvijek pravac, a slika pravca uvijek točka te da je relacija incidencije sačuvana.

Teorem 9.22

Niz točaka preslikava se korelacijom u pramen pravaca i obratno.

Nosilac toga niza točaka se pritom preslikava u vrh danog pramena pravaca.

Definicija 9.23

Korelacije projektivne ravnine kod koje su svaka točka i pravac kao slika te točke uzajamno pridruženi zovemo ***polaritetima***.

Polariteti su involutivne korelacije projektivne ravnine, (vidi definiciju 8.4).

Primijetimo da općenito možemo imati korelaciju koja preslikava svaku točku X na neki pravac x', a taj pravac x' na neku točku X", pri čemu se točke X i X" ne moraju poklapati (tj. ne moraju biti jedna te ista točka). Ako se točke X i X" ne poklapaju, onda dana korelacija nije involutivna. Korelacija je involutivna jedino ako se točke X i X" poklapaju (što direktno slijedi iz definicije involucije, tj. involutivnog preslikavanja – definicija 8.4).
Involutivna korelacija se naziva polaritet.

U polaritetu (involutivnoj korelaciji), gdje su točka X i pravac U uzajamno pridruženi, točku X zovemo ***polom*** pravca U, a pravac U ***polarom*** točke X.

Teorem 9.24

Neka korelacije projektivne ravnine je polaritet ako i samo ako je pripadna matrica $\mathbf{A}$ simetrična (tj. $\mathbf{A}^{T} = \mathbf{A}$). Jednadžbe polariteta su oblika

$$\rho U' = \mathbf{A} \cdot X, \quad |\mathbf{A}| \neq 0,$$
$$\rho X' = \mathbf{A}^{-1} \cdot U.$$