10.1 Polariteti konika

Neka je dana involutivna korelacija (vidi definiciju 9.23), tj. polaritet realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$ sa:

$$\mathrm{U} = \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}, \tag{44}$$

gdje je $\mathbf{A}$ nesingularna simetrična matrica trećeg reda (tj. $|\mathbf{A}| \neq 0$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$).

U polaritetu (44) su točka X i pravac U uzajamno pridruženi, pri čemu je točka X pol pravca U, odnosno pravac U je polara točke X.

U ovom odjeljku će se promatrati isključivo primjeri za koje je $\mathbf{A}$ nesingularna matrica (za razliku od sljedećeg odjeljka gdje će se promatrati i primjeri kad je $\mathbf{A}$ singularna matrica.

Motivacija:

Želi se u realnoj projektivnoj ravnini $P^2(\mathbb{R})$ odrediti geometrijsko mjesto točaka koje su incidentne sa sebi pridruženim polarama u polaritetu danom sa (44).

Ako je X točka, koja leži na svojoj polari U, onda (zbog incidencije) mora vrijediti:

$$\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{X} = 0, \tag{45}$$

gdje su X i U koordinatne matrice točke X, tj. pravca U.

S druge strane, po pretpostavci je pravac U polara točke X u polaritetu, kojeg iskazujemo sa (44), stoga možemo (44) uvrstiti u (45), čime dobivamo:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathrm{X})^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{X} = 0,$$

odnosno

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0. \tag{46}$$

Pritom se koristi svojstvo $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

Primijetimo da je sa (46) dana matrična jednadžba konike K^2, gdje je lijeva strana te jednadžbe ternarna kvadratna forma.
Time zaključujemo da je konika K^2 skup svih točaka realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$, koje imaju svojstvo da su incidentne sa svojom polarom u danom polaritetu, stoga možemo izreći sljedeći teorem.

Teorem 10.1.1

Skup točaka realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$ incidentnih sa svojom polarom u danom polaritetu je konika K^2.

Teoremu 10.1.1 je dualan sljedeći teorem.

Teorem 10.1.2

Skup pravaca realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$ koji su incidentni sa svojim polovima u danom polaritetu je konika k^2 (omotaljka 2. reda).

Terem 10.1.2 se dokazuje analogno kao i teorem 10.1.1

Naime, polaritet (44) možemo pisati u obliku:

$$X = \mathbf{A}^{-1} \cdot U, \tag{47}$$

gdje je $\mathbf{A}$ nesingularna simetrična matrica trećeg reda (tj. $|\mathbf{A}| \neq 0$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$).

Uvrštavanjem (47) u (45) dobivamo

$$U^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot U = 0. \tag{48}$$

Uspoređivanjem jednadžbe (48) sa jednadžbom (43), lako se vidi da je sa (48) dana matrična jednadžba konike k^2 (omotaljke 2. reda), gdje je lijeva strana te jednadžbe ternarna kvadratna forma.

Jasno, pritom je $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Time zaključujemo da je konika k^2 skup svih pravaca realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R})$, koji imaju svojstvo da su incidentni sa svojim polovima u danom polaritetu.

Time je teorem 10.1.2 dokazan.

- Na osnovu rečenog imamo da je svakom polaritetu $U = \mathbf{A} \cdot X$ (gdje je $|\mathbf{A}| \neq 0$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$) pridružena točno jedna kvadratna forma, a samim time i točno jedna nesingularna konika K^2, čija je matrična jednadžba $X^T \cdot \mathbf{A} \cdot X = 0$.

  Pritom je nesingularna simetrična matrica $\mathbf{A}$ (danog polariteta $U = \mathbf{A} \cdot X$) ujedno i matrica pridružene ternarne kvadratne forme $X^T \cdot \mathbf{A} \cdot X$, a time i pridružene konike K^2.

  Obrnuto možemo reći da je svakom konikom K^2, koja je prikazana pripadnom kvadratnom formom i nesingularnom simetričnom matricom $\mathbf{A}$ određen točno jedan polaritet.

  Matrica $\mathbf{A}$ polariteta i pripadne kvadratne forme se naziva ***matrica konike*** K^2.

Definicija 10.1.3

Pravac p zovemo polarom točke P s obzirom na danu koniku K^2 ako je taj pravac p slika točke P pri polaritetu određenom konikom K^2.

Točka P je pol pravca p s obzirom na koniku K^2 ako je točka P slika pravca p pri polaritetu određenom konikom K^2.

Nesingularnom konikom K^2 danom (matričnom) jednadžbom $X^T \cdot \mathbf{A} \cdot X = 0$, određen je (prema dosadašnjem razmatranju) jedan polaritet, kojim je nekoj čvrstoj točki X' pridružena polara

$$U' = \mathbf{A} \cdot X'. \tag{49}$$

Jednadžba te polare U', čija je koordinatna matrica U', je dana sa:

$$U'^T \cdot X = 0 \qquad \text{(točkovna jednadžba pravca).} \tag{50}$$

Jasno, X je koordinatna matrica (varijabilne) točke X, a U' je koordinatna matrica pravca (polare) određenog polaritetom (49).

Ako u jednadžbu polare U' (jednadžbu (50)) uvrstimo pravčaste koordinate promatrane čvrste polare (49), onda se dobiva da je jednadžba polare točke X' dana u obliku:

$$X'^T \cdot \mathbf{A} \cdot X = 0. \tag{51}$$

Pritom se matrična jednadžba (51) može pisati u obliku jednadžbe:

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\, x'_{i}\, x_{j} = 0\,. \tag{52}$$

Ako u jednadžbu (52) uvrstimo x'_i, $i = 0,1,2$ koordinate neke čvrste točke $X'(x'_0, x'_1, x'_2)$, onda se iz jednadžbe (52) dobiva linearna jednadžba polare pridružene toj točki $X'(x'_0, x'_1, x'_2)$ s obzirom na dani polaritet (49).

Nadalje, koristeći svojstvo da je pri polaritetu (involutivnoj koleraciji) incidencija točke i pravca invarijanta, dobivamo sljedeće:

- ako neka točka X leži na polari neke druge točke Y, onda i točka Y leži na polari točke X.

Time primjenom (51) mora vrijediti:

$$Y^{T} \cdot \mathbf{A} \cdot X = 0\,, \tag{53}$$

odnosno

$$X^{T} \cdot \mathbf{A} \cdot Y = 0\,. \tag{54}$$

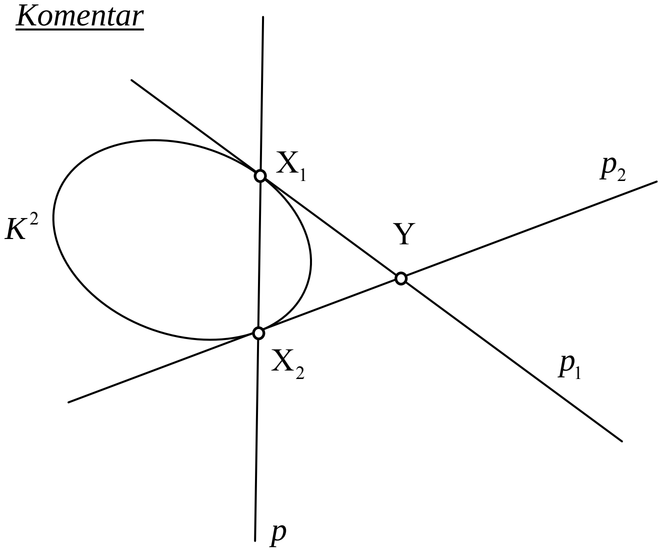
Jednadžba (54) se dobiva transponiiranjem jednadžbe (53).

Definicija 10.1.4

Dvije točke X i Y zovemo ***konjugiranima s obzirom na koniku*** K^2 ako svaka od njih leži na polari druge.

Ako konici K^2 pripada matrica $\mathbf{A}$, onda koordinatne matrice X i Y međusobno konjugiranih točaka s obzirom na tu koniku moraju zadovoljavati jednadžbu (54), tj. $X^{T} \cdot \mathbf{A} \cdot Y = 0$.

Komentar



Uzimajući u obzir teorem 10.1.10 imamo da je pravac p_1 polara točke X_1 konike K^2 i analogno da je pravac p_2 polara točke X_2 konike K^2.

Nadalje, primjenom teorema 10.1.14 imamo da je pravac p polara točke Y (sjecišta tangenata (polara) p_1 i p_2).

Sada se lako vidi da primjenom definicije 10.1.4 imamo:

točke X_1 i Y su konjugirane s obzirom na koniku K^2, ali isto tako i točke X_2 i Y su konjugirane s obzirom na tu koniku K^2

Jasno, točke X_1 i X_2 nisu konjugirane s obzirom na koniku K^2, jer točka X_1 ne leži na polari točke X_2 i obrnuto točka X_2 ne leži na polari točke X_1.

Kao neposredna posljedica definicije 10.1.4 je teorem 10.1.5

Teorem 10.1.5

Skup svih konjugiranih točaka nekoj čvrstoj točki s obzirom na neku koniu K^2 čini niz točaka na polari te čvrste točke.

Teorem 10.1.6

Polare točaka nekog niza čine pramen pravaca. Vrh tog pramena pravaca je pol nosioca spomenutog niza točaka.

Teorem 10.1.6 je direktna posljedica teorema 9.22.

Teorem 10.1.7

Neki pravac proširene realne projektivne ravnine $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$ siječe nesingularnu koniku K^2 u dvije realne ili u dvije konjugirano kompleksne točke ili u jednoj realnoj točki (kada se dvije realne točke poklapaju).

Dokaz:

Promatrajmo koniku K^2 danu jednadžbom:

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X} = 0 \tag{55}$$

u proširenoj realnoj projektivnoj ravnini $P^2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})$.

Tražimo sjecište te konike K^2 i pravca, čija je jednadžba u parametarskom obliku:

$$\mathrm{X} = \lambda_0 \cdot \mathrm{X}_0 + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1 . \tag{56}$$

Rješavanjem sustava dviju jednadžbi metodom supstitucije, tj. uvrštavanjem jednadžbe pravca (56) u jednadžbu konike (55) dobivamo: $\left(\lambda_0 \cdot \mathrm{X}_0 + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \left(\lambda_0 \cdot \mathrm{X}_0 + \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_1\right) = 0$,

odakle proizlazi:

$$\lambda_0^2 \cdot \mathrm{X}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_0 + 2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \mathrm{X}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 + \lambda_1^2 \cdot \mathrm{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 = 0 . \tag{57}$$

Pritom smo uzeli u obzir činjenicu da je $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

te da je $\mathrm{X}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1$ realan broj, čime je: $\mathrm{X}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1 = \left(\mathrm{X}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_1\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{X}_0$.

Dva rješenja $\left(\lambda_1 : \lambda_0\right)_1$ i $\left(\lambda_1 : \lambda_0\right)_2$ te homogene kvadratne jednadžbe daju nam homogene parametre sjecišta pravca (56) i konike (55).

Budući da se radi o kvadratnoj jednadžbi, očito je da ta rješenja mogu biti realna i različita ili dva realna jednaka rješenja (tj. jedno realno dvostruko rješenje) ili konjugirano kompleksna rješenja.

Time je teorem dokazan.

Teorem 10.1.8

Par konjugiranih točaka X_0 i X_1 s obzirom na koniku K^2 i sjecišta P_0, P_1 spojnice X_0X_1 s danom konikom K^2 čine harmoničku četvorku točaka.

Komentar

S obzirom na sliku 38 (vidi str. 84) imamo da par konjugiranih točaka X_1 i X_2 s obzirom na danu koniku i sjecišta A i B spojnice X_1X_2 s danom konikom čine harmoničku četvorku točaka i pišemo: $H(X_1X_2, AB)$.
Također s obzirom na sliku 38 imamo: $H(X_0X_2, CD)$.
Pritom su X_0 i X_2 konjugirane točke s obzirom na danu koniku, a C i D su sjecišta spojnice X_0X_2 s danom konikom.

Definicija 10.1.9

Pravac koji s nesingularnom konikom K^2 ima samo jednu (realnu dvostruko brojenu) točku zovemo ***tangentom konike*** K^2, a tu točku zovemo diralištem dotične tangente.

Teorem 10.1.10

Polara neke točke konike K^2 je tangenta te konike s diralištem u toj točki.

Dokaz:

Neka su točke X_0 i X_1 konjugirane s obzirom na koniku K^2: $X^T \cdot \mathbf{A} \cdot X = 0$ takve da je točka X_0 točka konike K^2 i da je $X_0 \neq X_1$.
Tada prema teoremu 10.1.1 točka X_0 (konike K^2) mora ležati na svojoj polari.
Nadalje, budući da je točka X_1 konjugirana točki X_0, onda prema teoremu 10.1.5 točka X_1 leži na polari točke X_0.
Pravac X_0X_1 je polara točke X_0, stoga za točku X_0 vrijedi:

$$X_0^T \cdot \mathbf{A} \cdot X_0 = 0 . \tag{58}$$

Nadalje, kako su X_0 i X_1 konjugirane s obzirom na koniku K^2, primjenom (54) proizlazi da je:

$$X_0^T \cdot \mathbf{A} \cdot X_1 = 0 . \tag{59}$$

Tražimo li sjecište pravca X_0X_1 danog sa $X = \lambda_0 \cdot X_0 + \lambda_1 \cdot X_1$ sa konikom K^2: $X^T \cdot \mathbf{A} \cdot X = 0$, tada gore dobivena jednadžba (57) s obzirom na (58) i (59) je dana sa:

$$\lambda_1^2 \cdot X_1^T \cdot \mathbf{A} \cdot X_1 = 0 . \tag{60}$$

Za $\lambda_1 = 0$ dobiva se jedno (dvostruko) sjecište, a to je prema (59) točka X_0.

Polara točke X_0 je pravac X_0X_1 i on ima samo točku X_0 zajedničku s konikom K^2, stoga je pravac X_0X_1 tangenta konike K^2 s diralštem X_0.

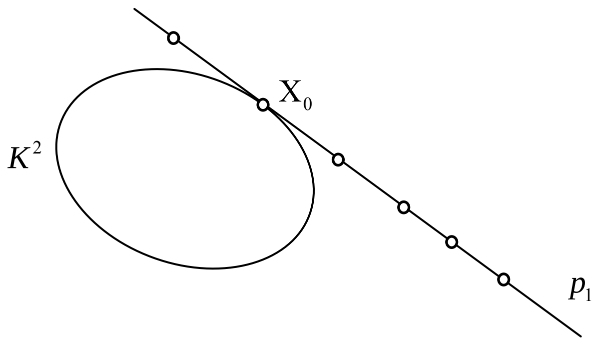
Time je teorem dokazan.

Korolar 10.1.11

Nekoj točki X_0 na konici K^2 konjugirana je bilo koja točka na tangenti konike s diralištem u toj točki.

Korolar je direktna posljedica teorema 10.1.10.

Komentar



Prema korolaru 10.1.11 imamo da je bilo koja točka na tangenti p_1 konjugirana točki X_0 na konici K^2.

Jasno, pritom je tangenta p_1 polara točke X_0 konike K^2.

Teorem 10.1.12

Skup svih tangenata konike K^2 dane jednadžbom: $X^T \cdot \mathbf{A} \cdot X = 0$

čini koniku (omotaljku) k^2 čija je jednadžba: $U^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot U = 0$.

Drugim riječima, tangente konike K^2, kao skupa točaka koje su incidentne sa svojim polarama pri danom polaritetu određenom matricom $\mathbf{A}$, čine omotaljku k^2, koja se sastoji od svih pravaca što prolaze svojim polovima pri tom istom polaritetu.

Dokaz:

Obje konike K^2 i k^2 pridružene su polaritetu $U = \mathbf{A} \cdot X$ ili $X = \mathbf{A}^{-1} \cdot U$.

Prema tome točki s koordinatnom matricom X odgovara polara s koordinatnom matricom U.
Uvrstimo li gornje jednakosti u jednadžbu konike dobivamo:

$$X^T \cdot \mathbf{A} \cdot X = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot U\right)^T \cdot \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot U\right) = U^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot U = 0.$$

Time je teorem dokazan.

Teorem 10.1.13

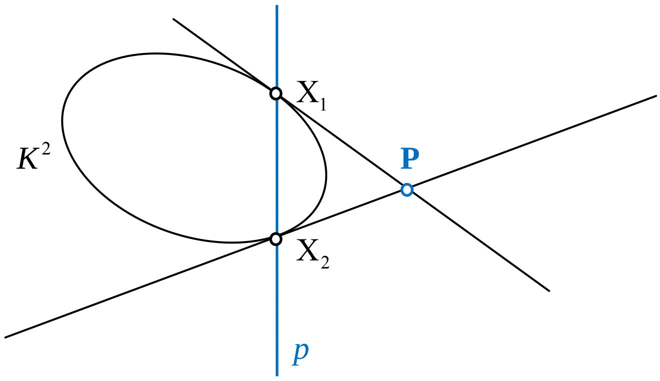
Sjecište polara dviju danih točka s obzirom na koniku K^2 je pol spojnice tih dviju točaka.

Teorem 10.1.13 je neposredna posljedica teorema 10.1.6.

Teorem 10.1.14

Sjecište P dviju različitih tangenata konike K^2 je pol spojnice *p* dirališta X_1 i X_2 tih tangenata (vidi sliku 37).

Jasno, na slici 37 imamo da je pravac *p* polara točke **P** (sjecišta dviju različitih tangenata konike K^2)



slika 37

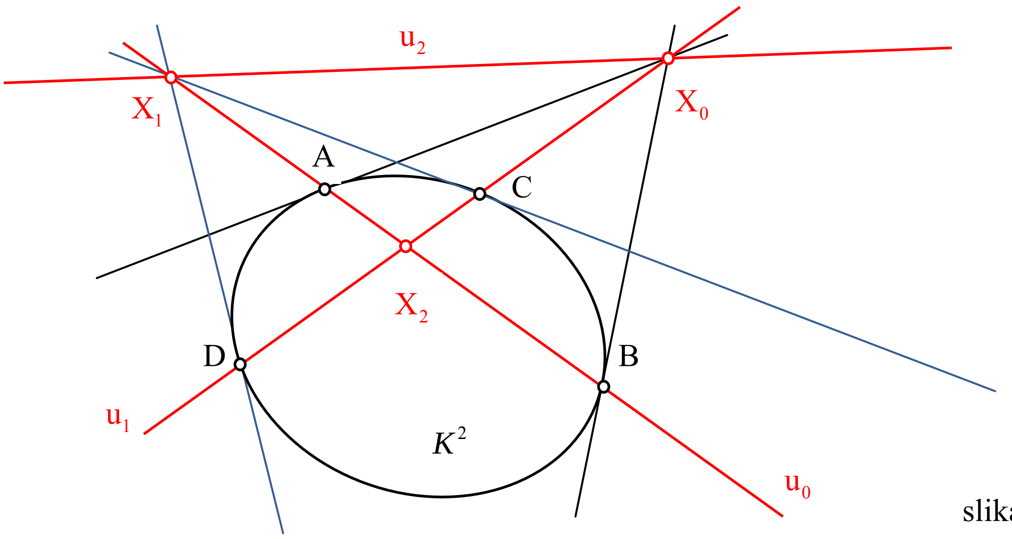
Definicija 10.1.15

Ako s obzirom na koniku K^2 postoji trovrh takav da je svaki njegov vrh pol suprotne stranice, onda se takav trovrh zove ***autopolarni trovrh*** konike K^2.

- Autopolarni trovrh uvijek postoji za nesingularnu koniku K^2.

Obrazložimo navedenu tvrdnju.

Odaberimo neku točku X_0 koja ne leži na konici K^2, kao što je prikazano na slici 38.



slika 38

Polara u_0 točke X_0 jednoznačno je određena te nije incidentna s X_0.
Na polari u_0 odaberimo proizvoljnu točku X_1 (različitu od točke X_0) takvu da ne leži na konici K^2.
Tada primjenom definicije 10.1.4 imamo da su (različite) točke X_0 i X_1 konjugirane s obzirom na koniku K^2, stoga polara u_1 točke X_1 prolazi točkom X_0 i različita je od u_0.
Nadalje, zbog pretpostavke da točke X_0 i X_1 ne leže na konici K^2 te njihova spojnica nije tangenta promatrane konike, dobivamo da polare u_0 i u_1 (točaka X_0 i X_1) ne mogu pasti zajedno sa spojnicom u_2 točaka X_0 i X_1. Pritom je u_2 polara točke X_2, gdje je X_2 sjecište polara u_0 i u_1.

Pravci u_0, u_1, u_2 čine jedan trostran, a vrhovi X_0, X_1 i X_2 tog trostrana čine jedan autopolarni trovrh.

- U realnoj projektivnoj ravnini $P^2(\mathbb{R})$ postoji neizmjerno mnogo autopolarnih trovrha nesingularne konike K^2.

Definicija 10.1.16

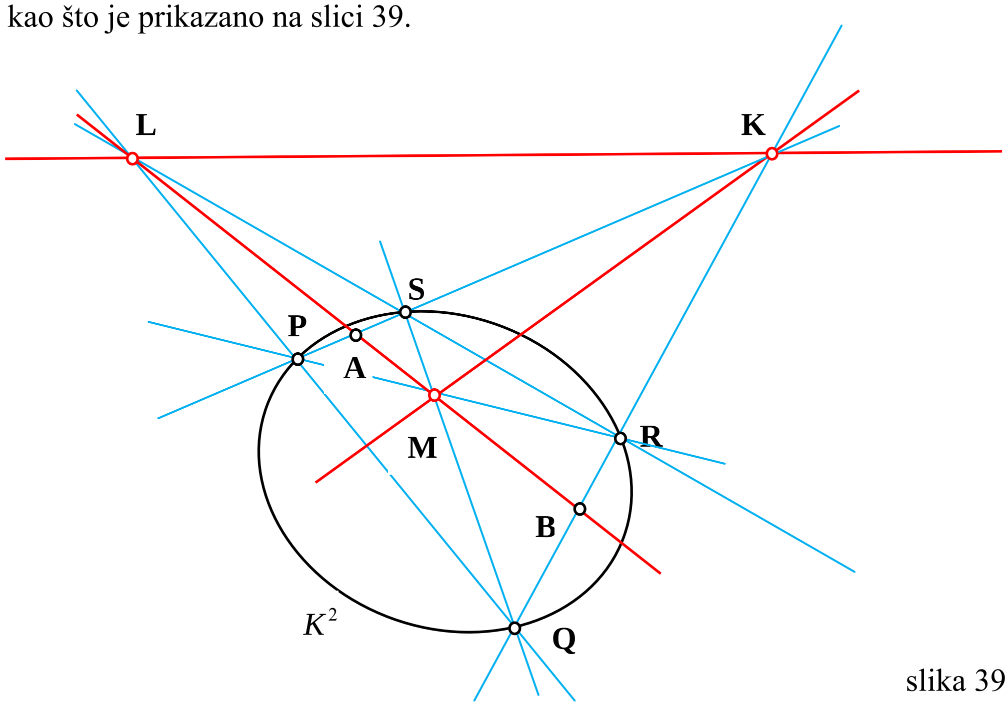
Ako vrhovi nekog n-terovrha leže na konici K^2, onda se taj n-terovrh zove ***upisan n-terovrh konici*** K^2.

Teorem 10.1.17

Dijagonalni trovrh nekoj konici K^2 upisanog potpunog četverovrha ujedno je i autopolarni trovrh te konike.

Dokaz:

Neka je dana konika K^2 i upisani potpuni četverovrh **PQRS**, kojemu je **KLM** dijagonalni trovrh, kao što je prikazano na slici 39.



slika 39

Lako se vidi da točke **Q**, **R**, **B** i **K** kao i točke **P**, **S**, **A** i **K** čine harmoničku četvorku točaka, tj. imamo H(**QR**, **BK**), odnosno H(**PS**, **AK**).

Odavde slijedi da je točka **K** konjugirana točki **B**, ali isto tako i točki **A** s obzirom na koniku K^2 (vidi teorem 10.1.8) te je primjenom teorema 10.1.5 spojnica **AB** polara točke **K** s obzirom na koniku K^2. Pritom spojnica **AB** prolazi točkama **L** i **M**.

Analogno navedenom pokazuje se da je točka **L** pol spojnice **KM** te da je točka **M** pol spojnice **KL**.

Time dobivamo da je dijagonalni trovrh **KLM** ujedno i autopolarni trovrh konike K^2.