Ponavljanje: vektorska algebra

Pojam vektora

Dužina $\overline{AB}$ kojoj su krajevi (tj. točke) A i B uređeni tako da je jedna točka proglašena početkom (hvatištem), a druga krajem (šiljkom) naziva se **orijentirana dužina** ili **vektor**.

Vektor kojemu je točka A početak, a točka B kraj označavamo sa $\overrightarrow{AB}$. Vektori se uobičajeno označavaju sa $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,… ali isto tako (u nekim literaturama) i boldiranim slovima: **a**, **b**, **c**,…

Pravac AB zovemo **pravcem nosiocem vektora** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, a udaljenost između točaka A i B zovemo **duljinom (normom ili modulom) vektora** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i označavamo sa: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

- Vektor je klasa orijentiranih dužina, jednoznačno određen smjerom, orijentacijom i duljinom.

Kažemo da su bilo koja **dva vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **jednaka** i pišemo $\vec{a} = \vec{b}$ ako oni imaju jednaki smjer, orijentaciju i duljinu. Ako je duljina nekog vektora jednaka jedan, onda kažemo da je taj vektor **jedinični vektor**, a ako je duljina nekog vektora jednaka nuli, onda kažemo da je taj vektor **nul-vektor** i označavamo ga sa: $\vec{0}$. Nul-vektor možemo shvatiti kao orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AA}$ (s istom početnom i krajnom točkom), što je zapravo bilo koja točka A. Jasno, točka nema jednoznačan smjer, a samim time ni orijentaciju, stoga zaključujemo da nul-vektor nema jednoznačan smjer (to je jedini vektor koji ima beskonačno mnogo smjerova).

Tvrdnja 1

Neka je $\vec{a}$ bilo koji vektor takav da je $|\vec{a}| \neq 1$. Tada je $\boxed{\overrightarrow{a_0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$ jedinični vektor vektora $\vec{a}$.

Ako dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju jednaki smjer i duljinu, a suprotnu orijentaciju, onda kažemo da su oni **suprotni vektori** i pišemo: $\vec{a} = -\vec{b}$. Uočimo: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (tj. $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ su suprotni vektori).

Ako dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju jednaki smjer, onda kažemo da su oni **kolinearni vektori** i pišemo:

$$\boxed{\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}}, \text{ gdje je } \lambda \in \mathbb{R}.$$

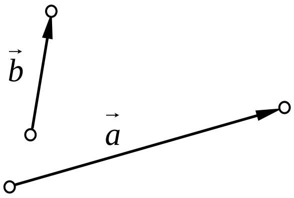
Kolinearni vektori imaju paralelne pravce nosioce ili leže na istom pravcu nosiocu. Specijalno:

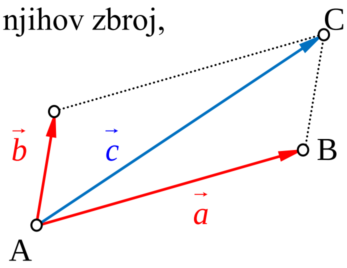
- ako je $\lambda = 1$, onda je $\vec{a} = \vec{b}$;
- ako je $\lambda = -1$, onda je $\vec{a} = -\vec{b}$;
- ako je $\lambda = 0$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, onda je $\vec{a} = \vec{0}$ (jer je: $0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$).

Time zaključujemo da su isti i suprotni vektori ujedno kolinearni vektori, ali isto tako da je nul-vektor kolinearan sa bilo kojim vektorom.

Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Linearna kombinacija vektora.

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo koja dva vektora. Tada je jednoznačno određen njihov zbroj, tj. vektor $\vec{c}$ takav da je: $\boxed{\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}}$.



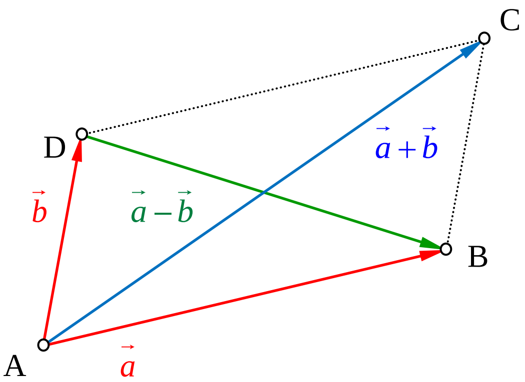


Svojstva zbrajanja vektora:

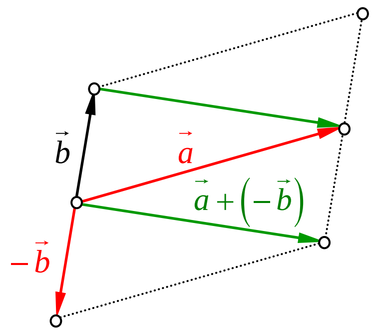
$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$	(asocijativnost)
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$	(nul-vektor $\vec{0}$ je neutralni element)
$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$	($-\vec{a}$ je suprotan vektor vektoru $\vec{a}$)
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	(komutativnost)

Podsjetimo se:

Zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ predočen je dijagonalom paralelograma koja izlazi iz vrha u kojemu su počeci vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je predočena drugom dijagonalom paralelograma (pritom treba paziti na orijentaciju te dijagonale u ovisnosti o suprotnim vektorima $\vec{a}-\vec{b}$ i $\vec{b}-\vec{a}$).



Koristi se svojstvo: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$



Ako bilo koji vektor $\vec{b}$ pomnožimo sa skalarom (realnim brojem različitim od nule) dobivamo ponovo vektor $\vec{a}$, koji ima svojstvo da je kolinearan sa vektorom $\vec{b}$.

Drugim riječima, ako je $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, onda su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.

Svojstva množenja vektora sa skalarom:

$$\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$$

$$\left(\lambda+\mu\right)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$$

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$$

$$0\cdot\vec{a}=\vec{0}$$

✐ Za vektore $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_n}$ i skalare λ_1, λ_2,…, λ_n jednoznačno je određen vektor

$$\vec{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} .$$

Vektor $\vec{b}$ zovemo **linearnom kombinacijom** (ili linearnim spojem) vektora $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_n}$.

Kažemo da su **vektori** $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_n}$ **linearno zavisni** ako postoje skalari λ_1, λ_2,…, λ_n i barem jedan $\lambda_i \neq 0$ takvi da vrijedi

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = \vec{0} \quad \text{ili} \quad \text{kraće} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{a_i} = \vec{0} .$$

Uz pretpostavku da je $\lambda_i \neq 0$ proizlazi da je vektor $\overrightarrow{a_i}$ linearna kombinacija preostalih $n-1$ vektora $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_{i-1}}, \overrightarrow{a_{i+1}}, ..., \overrightarrow{a_n}$. Naime, iz pretpostavki $\lambda_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{a_i} = \vec{0}$ proizlazi:

$$\lambda_i \cdot \overrightarrow{a_i} = -\left(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_{i-1} \cdot \overrightarrow{a_{i-1}} + \lambda_{i+1} \cdot \overrightarrow{a_{i+1}} + \cdots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}\right)$$

odnosno
$$\overrightarrow{a_i} = \mu_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \mu_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \mu_{i-1} \cdot \overrightarrow{a_{i-1}} + \mu_{i+1} \cdot \overrightarrow{a_{i+1}} + \cdots + \mu_n \cdot \overrightarrow{a_n} ,$$

gdje je: $\mu_j = -\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}$ za svaki $j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{i\}$.

Kažemo da su **vektori** $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_n}$ **linearno nezavisni** ako iz $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{a_i} = \vec{0}$ proizlazi da su svi skalari λ_1, λ_2,…, λ_n jednaki nuli, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Lako se može pokazati da su bilo koja tri vektora u ravnini linearno zavisna te da su bilo koja četiri vektora u trodimenzionalnom prostoru linearno zavisna.
Općenito bilo koja $n+1$ vektora u n-dimenzionalnom prostoru su linearno zavisna.

Koordinatni prikaz vektora u prostoru

Neka je O bilo koja točka (trodimenzionalnog) prostora i neka su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični međusobno ortogonalni vektori, koji čine desni pravokutni koordinatni sustav $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Točku O zovemo ishodištem pravokutnog koordinatnog (Descarteovog) sustava.

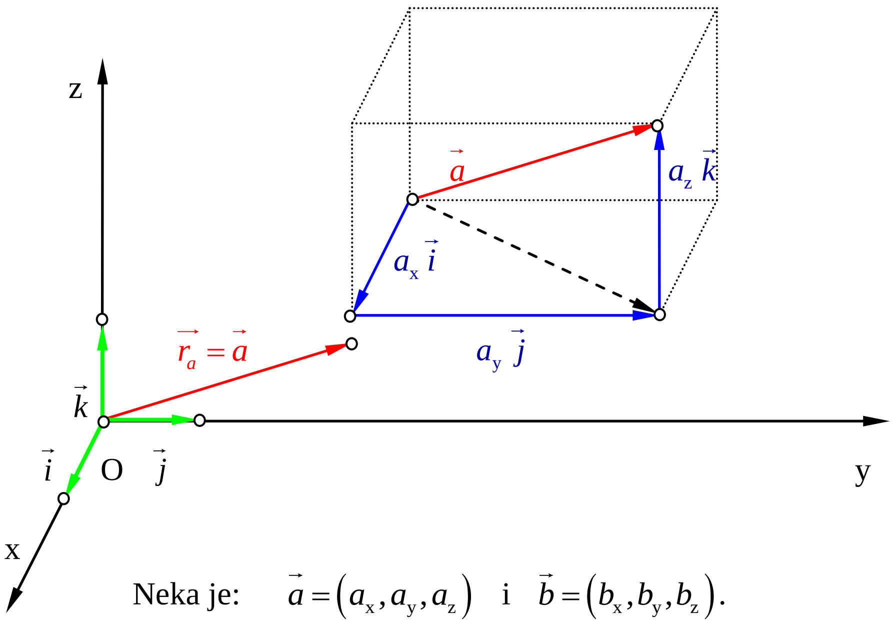
Svakoj točki $\mathrm{T}(x_1, y_1, z_1)$ prostora možemo jednoznačno pridružiti vektor $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$, koji zovemo **radij-vektor** točke T i označavamo ga sa $\overrightarrow{r_\mathrm{T}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}}$. Pritom je: $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$.

Promatrajmo sada proizvoljni vektor $\vec{a}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Koristeći svojstvo jednakosti vektora imamo da je bilo kojem vektoru $\vec{a}$ jednoznačno pridružen radij-vektor $\overrightarrow{r_a}$ takav da je $\overrightarrow{r_a} = \vec{a}$, stoga možemo pisati: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

Komentar:

Uobičajeno je da se vektor $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ zapisuje i u obliku $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Pritom uređenu trojku (a_x, a_y, a_z) zovemo pravokutnim (Descarteovim) koordinatama vektora $\vec{a}$.



Neka je: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Tada je: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z) = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$,

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z) = \lambda \cdot a_x \vec{i} + \lambda \cdot a_y \vec{j} + \lambda \cdot a_z \vec{k} \ .$$

Ako su zadane točke $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ i $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$, onda je vektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ dan sa:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

ili

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) .$$

Produkti vektora

❖ **Produkt od dva vektora**

(1) Skalarni (ili unutarnji ili in) produkt vektora

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je skalar definiran sa:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi} \ , \qquad (1)$$

gdje je $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedenih u isti početak te je: $0 \le \varphi \le \pi$.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani pravokutnim koordinatama, tj. ako je

$$\vec{a} = \left(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}}\right) = a_{\mathrm{x}}\,\vec{i} + a_{\mathrm{y}}\,\vec{j} + a_{\mathrm{z}}\,\vec{k} \qquad \text{i} \qquad \vec{b} = \left(b_{\mathrm{x}}, b_{\mathrm{y}}, b_{\mathrm{z}}\right) = b_{\mathrm{x}}\,\vec{i} + b_{\mathrm{y}}\,\vec{j} + b_{\mathrm{z}}\,\vec{k},$$

onda je:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_{\mathrm{x}} \cdot b_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}} \cdot b_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}} \cdot b_{\mathrm{z}}}\,. \tag{2}$$

Svojstva skalarnog produkta:

(i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (zakon komutacije)

(ii) $\vec{a} \cdot \left(\lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}\right) = \lambda \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \mu \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b} + \left(\mu \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{c}$ (zakon distribucije)

(iii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ako i samo ako $\vec{a} \perp \vec{b}$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$.

Važno: za skalarni produkt ne vrijedi zakon asocijativnosti, tj. $\boxed{\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}}$.

Uočiti da je $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$ vektor kolinearan sa vektorom $\vec{a}$ te da je $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ vektor kolinearan sa vektorom $\vec{c}$.

Specijalno ako je $\vec{a} = \vec{b}$, onda je $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1}$, što povlači: $\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$, odnosno:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}}\,. \tag{3}$$

Komentar:

Primjenom formule (3) lako se može dokazati tvrdnja 1 (str 3).

Ako je vektor $\vec{a}$ zadan pravokutnim koordinatama $\vec{a} = \left(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}}\right) = a_{\mathrm{x}}\,\vec{i} + a_{\mathrm{y}}\,\vec{j} + a_{\mathrm{z}}\,\vec{k}$, onda se njegova duljina izračunava po formuli:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2 + a_{\mathrm{z}}^2}}\,. \tag{4}$$

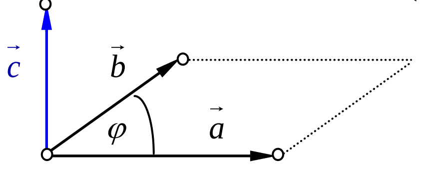
Uzimajući u obzir navedeno imamo da se kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ računa po formuli:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_{\mathrm{x}} \cdot b_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}} \cdot b_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}} \cdot b_{\mathrm{z}}}{\sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2 + a_{\mathrm{z}}^2} \cdot \sqrt{b_{\mathrm{x}}^2 + b_{\mathrm{y}}^2 + b_{\mathrm{z}}^2}}}\,. \tag{5}$$

(2) Vektorski (ili vanjski ili eks) produkt vektora

Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, čija je duljina jednaka površini paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj.

$$\boxed{\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi}\,, \tag{6}$$



gdje je $\varphi = \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Pritom je: $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani pravokutnim koordinatama, tj. ako je

$$\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \qquad \text{i} \qquad \vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

onda je: $$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\right)\vec{i}+\left(a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z\right)\vec{j}+\left(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\right)\vec{k}} \qquad (7)$$

pa je $$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\left(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\right)^2+\left(a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z\right)^2+\left(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\right)^2}\,.$$

Svojstva vektorskog produkta:

(*i*) $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ (zakon antikomutacije)

(*ii*) $\vec{a}\times\left(\lambda\cdot\vec{b}+\mu\cdot\vec{c}\right)=\lambda\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\mu\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)=\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}+\left(\mu\cdot\vec{a}\right)\times\vec{c}$ (zakon distribucije)

(*iii*) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ako i samo ako $\vec{a}\parallel\vec{b}$ ili $\vec{a}=\vec{0}$ ili $\vec{b}=\vec{0}$.

✎ Ako je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, onda su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori (tj. $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

Time je: $\boxed{\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}}$ za bilo koji vektor $\vec{a}$.

Važno: za vektorski produkt ne vrijedi zakon asocijativnosti, tj. $\boxed{\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}}$.

Uočiti da je $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ vektor komplanaran sa vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$ te da je $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ vektor komplanaran sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

❖ Trostruki produkti vektora

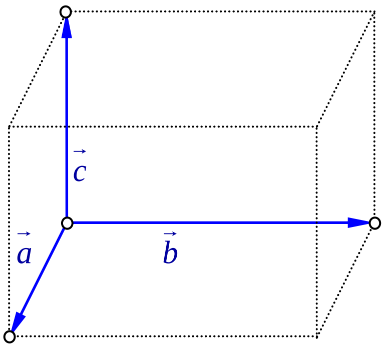
(1) Vektorsko-skalarni (ili mješoviti ili eks-in) produkt vektora

Mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalar definiran sa:

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}}\,. \qquad (8)$$

Geometrijska interpretacija:

Mješoviti produkt $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je po apsolutnoj vrijednosti jednak volumenu paralelopipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.



Vrijednost mješovitog produkta se ne mijenja ako ciklički permutiramo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ili ako zamijenimo operacije $\times$ i $\cdot$

Dakle, vrijedi: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$ odnosno $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Za sve preostale permutacije koje nisu cikličke mijenja se predznak, tj. vrijedi: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$,

pri čemu je: $\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)$.

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni (leže u istoj ravnini) ako je njihov mješoviti produkt jednak nuli, tj. ako je $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

Äko su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ zadani pravokutnim koordinatama, tj. ako je

$$\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$
$$\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$
$$\vec{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$$

onda je:

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}. \qquad (9)$$

(2) Vektorsko-vektorski (ili eks-eks) produkt vektora

Vektorsko-vektorski produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je vektor $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ ili $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Pritom vrijedi:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} \\ \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) \end{vmatrix} \qquad (10)$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Identitete (10), (11) možemo ciklički permutirati. Iz danih identiteta lako se može pokazati da je $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\neq\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. Uočiti da je $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ (vidi svojstva skalarnog produkta).

Geometrijska interpretacija vektorsko-vektorskog produkta :

Neka je $\vec{d}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$. Tada je: $\vec{d}\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ i $\vec{d}\perp\vec{c}$.

S druge strane vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ je okomit na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, stoga iz $\vec{d}\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ proizlazi da vektor $\vec{d}$ leži u ravnini određenoj vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. da je vektor $\vec{d}$ komplanaran sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

✎ Cikličkim raspisivanjem identiteta (11) lako se može pokazati da vrijedi **Jacobiev identitet**:

$$\boxed{\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}}\,. \tag{12}$$

❖ **Višestruki produkti vektora**

Navedimo neke višestruke produkte vektora.

(1) Skalarni produkt vektorskih produkata od po dva vektora

$$\boxed{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\\ \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\end{vmatrix}}\,. \tag{13}$$

Specijalno je: $\boxed{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$, gdje je $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. (14)

(2) Vektorski produkt vektorskih produkata od po dva vektora

$$\boxed{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)}$$

$$\boxed{=\vec{c}\cdot\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)-\vec{d}\cdot\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}\,. \tag{15}$$

Pritom $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ označava mješoviti produkt vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

(3) Vektorski produkt vektora s vektorsko-vektorskim produkom triju vektora

$$\boxed{\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right]=\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)}\,. \tag{16}$$

(4) Produkt od šest vektora - skalarni produkt mješovitih produkata

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{p},\vec{q},\vec{s}\right)=\begin{vmatrix}\left(\vec{a}\cdot\vec{p}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{q}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{s}\right)\\ \left(\vec{b}\cdot\vec{p}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{q}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{s}\right)\\ \left(\vec{c}\cdot\vec{p}\right) & \left(\vec{c}\cdot\vec{q}\right) & \left(\vec{c}\cdot\vec{s}\right)\end{vmatrix}}\,. \tag{17}$$

❖ **Gramova determinanta**

Gramova determinanta vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se sa: $G\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ i definira se:

$$\boxed{G\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\\ \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)\end{vmatrix}}\,. \tag{18}$$

Uočimo da je: $G\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$, odnosno $G\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$.

Uzimajući u obzir identitet (14) dobivamo: $G\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2$ ili $G\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

Gramova determinanta vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ označava se sa: $G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ i definira se:

$$\boxed{G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\\ \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\\ \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{c}\cdot\vec{c}\right)\end{vmatrix}}\ . \tag{19}$$

Uzimajući u obzir identitet (17) lako se vidi da je:

$$G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right),\quad \text{odnosno}\quad G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2 .$$

Svojstva Gramove determinante:

(*i*) $G\left(\vec{a},\vec{b}\right)\geq 0$, $G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\geq 0$.

(ii) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno nezavisni $\Leftrightarrow$ $G\left(\vec{a},\vec{b}\right)>0$.

(iii) Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno nezavisni $\Leftrightarrow$ $G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$.

(iv) Površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je jednaka $\sqrt{G\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$.

(v) Volumen paralelopipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je jednak $\sqrt{G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}$.

(vi) Za vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ vrijedi:

$$G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\\ \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) & \left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\\ \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{c}\cdot\vec{c}\right) & \left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)\\ \left(\vec{d}\cdot\vec{a}\right) & \left(\vec{d}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{d}\cdot\vec{c}\right) & \left(\vec{d}\cdot\vec{d}\right)\end{vmatrix}=0\ .$$

(vii) Za vektor $\vec{a}$ definira se Gramova determinanta sa $G\left(\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}$ ili $G\left(\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2$.

(viii) Za svaka dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi: $G\left(\vec{a},\vec{b}\right)\leq\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2$.

(ix) Za svaka tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi: $G\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\leq\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\left|\vec{c}\right|^2$.

♦ Provježbati zadatke u Frančuli str. 8-16.