Ponavljanje: vektorski prostor

<u>Vektorski (ili linearni) prostor</u> nad tijelom Φ je skup $X = \{x, y, z, ...\}$ zajedno s dvije binarne operacije: zbrajanjem (aditivnošću) $+: X \times X \to X$ i množenjem sa skalarom $\cdot: \Phi \times X \to X$, pri čemu vrijede sljedeća svojstva:

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asocijativnost)

(ii) postoji element $0 \in V$ takav da je: $0 + x = x$ (neutralni element)

(iii) $x - y = -y + x = 0$ (egzistencija suprotnog elementa)

(iv) $x + y = y + x$ (komutativnost)

(v) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

(vi) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

(vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

(viii) $1 \cdot x = x$

(ix) $0 \cdot x = 0$

za svaki $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \Phi$.

Trojku $(X, +, \cdot)$ zovemo *vektorskim prostorom nad tijelom* Φ. Elemente vektorskog prostora nazivamo *vektorima*, a elemente tijela Φ (nad kojim je zadan vektorski prostor) nazivamo *skalarima*. Pritom se tijelo Φ zove *tijelo skalara*.

Vektorski prostor $(X, +, \cdot)$ nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ naziva se *realni vektorski prostor* i analogno vektorski prostor $(X, +, \cdot)$ nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ naziva se *kompleksni vektorski prostor*. Podsjetimo se, komutativno tijelo naziva se poljem.

✐ Vektorski prostor $(X, +, \cdot)$ nad tijelom Φ često se definira kao *aditivna Abelova grupa* $(X, +)$ u kojoj je definirano množenje s elementima iz tijela Φ, tj. za svaki par $\lambda \in \Phi$, $x \in X$ definiran je element $\lambda \cdot x \in X$, pri čemu vrijede svojstva *(v)-(viii)*.

Aditivna Abelova grupa je komutativna grupa $(X, +)$, tj. neprazan skup $X = \{x, y, z, ...\}$ zajedno s binarnom operacijom zbrajanja $+: X \times X \to X$ s obzirom na koju je svakom paru $x, y \in X$ pridružen jedinstveni element $x + y \in X$, pri čemu vrijede svojstva *(i)-(iv)*. Jasno, ako vrijede svojstva *(i)-(iii)*, onda se $(X, +)$ naziva aditivna grupa.

Primjeri realnih vektorskih prostora:

(vidi S. Kurepa: Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, str.19-23).

(1) Skup realnih brojeva (2) n-dimenzionalni prostor $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$;

(3) Skup $V=\left\{\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}\mid \mathrm{i}\geq 1\right\}=\left\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\right\}$ svih vektora (orijentiranih dužina), gdje $\lambda\cdot\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}\in V$ označava vektore kolinearne vektoru $\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}\in V$ za bilo koji $\mathrm{i}\geq 1$. Jasno, $\lambda\in\mathbb{R}$.

(4) Skup $\mathbb{R}[x]$ svih polinoma n-tog stupnja s realnim koeficijentima.

U nastavku će se razmatrati realni vektorski prostor $(V,+,\cdot)$, gdje je $V=\left\{\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}\mid \mathrm{i}\geq 1\right\}=\left\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\right\}$ skup svih vektora.

- **Konačan skup vektora** $\left\{\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}\mid 1\leq \mathrm{i}\leq \mathrm{n}\right\}=\left\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{n}}}\right\}\subset V$, $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ **je linearno nezavisan** ako iz jednadžbe $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\cdot\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}=\vec{0}$ proizlazi $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{\mathrm{n}}=0$ (svi skalari su jednaki nuli).

- Ako postoji barem jedan $\lambda_{\mathrm{i}}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ takav da vrijedi: $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\cdot\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}=\vec{0}$, onda kažemo da je **konačan skup vektora** $\left\{\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}\mid 1\leq \mathrm{i}\leq \mathrm{n}\right\}$ **linearno zavisan**. U ovom slučaju vektor $\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}$ je linearna kombinacija (ili linearni spoj) vektora $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{i}-1}},\overrightarrow{x_{\mathrm{i}+1}},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{n}}}$.

- Kažemo da **podskup** $S\subset V$ ***razapinje vektorski prostor*** V ako za svaki vektor $\vec{x}\in V$ postoje vektori $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{n}}}\in S$ i realni brojevi (skalari) $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mathrm{n}}\in\mathbb{R}$ takvi da je: $\vec{x}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\cdot\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}$.

$V=span_{\mathbb{R}}\left\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{n}}}\right\}$ označava da je vektorski prostor V razapet vektorima $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{n}}}$, pri čemu su koeficijenti (skalari) realni brojevi.

- **Baza vektorskog prostora** V je linearno nezavisan skup vektora, koji razapinje vektorski prostor *V*. Vektorski prostor V je konačno dimenzionalan ako ga razapinje konačno mnogo linearno nezavisnih vektora $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{n}}}$, $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$.

Drugim riječima, vektorski prostor V je konačno dimenzionalni ako je

(*i*) $V=span_{\mathbb{R}}\left\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{n}}}\right\}$, $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ i

(*ii*) ako iz $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}\cdot\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}=\vec{0}$ proizlazi: $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{\mathrm{n}}=0$.

Teorem (Teorem 1, S. Kurepa: Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, str. 36-37)

U konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru *V* postoji baza. Svaka baza u *V* se sastoji od konačno elemenata. Bilo koje dvije baze vektorskog prostora *V* imaju isti broj elemenata.

Broj elemenata baze vektorskog prostora *V* naziva se *dimenzija vektorskog prostora V* i označava se sa $n=\dim V$. Baza $\left\{\overrightarrow{x_{\mathrm{i}}}\mid 1\leq \mathrm{i}\leq \mathrm{n}\right\}=\left\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_{\mathrm{n}}}\right\}\subset V$ vektorskog prostora je uređen skup vektora, gdje je $\overrightarrow{x_1}$ prvi vektor baze, $\overrightarrow{x_2}$ drugi vektor baze itd.

Primjeri

(1) Dimenzija prostora $\mathbb{R}^n$ jednaka je n i pišemo: $n = \dim \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

(2) Realni vektorski prostor $\mathbb{R}[x]$ (skupa svih polinoma s realnim koeficijentima) ima beskonačnu dimenziju, jer je $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ baza od $\mathbb{R}[x]$

- Ako je skup vektora $\{\vec{x_i} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}\} \subset V$ ($n \in \mathbb{N}$ je fiksiran) baza vektorskog prostora V, onda se svaki vektor $\vec{x} \in V$ može na jedinstveni način zapisati u obliku sume: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x_i}$. Skalari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ se zovu *koeficijenti vektora* $\vec{x}$ s obzirom na danu bazu.

- Na vektorskom prostoru *V* definira se *skalarni produkt*, *vektorski produkt* i *mješoviti produkt* - vidi produkte vektora, str. 6-11.

- Neka je $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$.
  Vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ su okomiti (ortogonalani) ako je $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. Vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ su kolinearni ako je $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ ili ako postoji $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$.

- Ako je na vektorskom prostoru *V* definiran skalarni produkt, onda je $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ duljina vektora $\vec{x} \in V$ za svaki $\vec{x} \in V$.

Teoerem

Neka je *V* konačno dimenzionalni vektorski prostor na kojemu je definiran skalarni produkt. Tada postoji $\{\vec{e_i} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\} \subset V$ **ortonormirana baza** u *V*.

Ako je $\{\vec{e_i} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\} \subset V$ ortonormirana baza u *V*, onda vrjedi:

(*i*) $|\vec{e_i}| = 1$ za svaki $1 \leq i \leq n$,

(*ii*) $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 0$ (tj. $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}$) za svaki $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$,

(*iii*) svaki vektor $\vec{x} \in V$ može se na jedinstveni način zapisati u obliku sume: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{e_i}$.

Napomena:

U općem slučaju kada će se razmatrati n-dimenzionalni realni vektorski prostor $\mathbb{R}^n$, podrazumijevati će se da je $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^n$.
Specijalno, za $n = 2$ umjesto $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ uzimati će se da je $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormirana baza ravnine $\mathbb{R}^2$ i analogno za $n = 3$ da je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza trodimenzionalnog prostora $\mathbb{R}^3$.