1. Uvod

1.1 Vektorska funkcija skalarnog argumenta

Definicija 1.1.1

Neka je $\mathrm{I}=\langle a,b\rangle\subseteq\mathbb{R}$, $\mathrm{I}\neq\varnothing$ neprazan podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Svako preslikavanje $\vec{u}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n}\geq 2$ sa intervala I u vektorski prostor $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ takvo da je svakom elementu $t\in\mathrm{I}$ pridružen vektor $\vec{u}(t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ naziva se **vektorska funkcija skalarnog argumenta** i označava se sa: $\quad\vec{u}=\vec{u}(t)$, za svaki $t\in\mathrm{I}$.

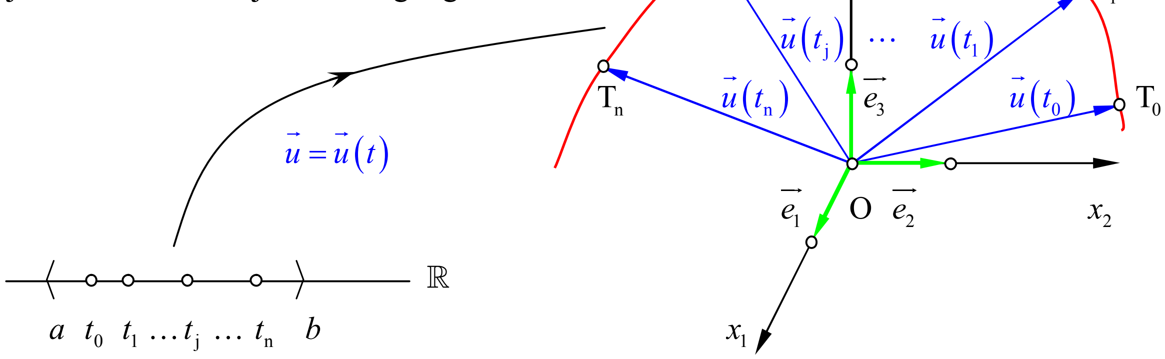
Interval $\mathrm{I}=\langle a,b\rangle\subseteq\mathbb{R}$ se naziva domenom vektorske funkcije $\vec{u}$, a skup $\vec{u}(\mathrm{I})=\left\{\vec{u}(t)\mid t\in\mathrm{I}\right\}\subset\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ se naziva slika vektorske funkcije $\vec{u}$.

✎ Konkretno, neka je $\mathrm{n}=3$ i neka je $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, tj. neka je $\left(\mathrm{O};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ desni pravokutni koordinatni sustav prostora $\mathbb{R}^3$.

Tada preslikavanje $\vec{u}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ definirano sa:

$$\vec{u}=\vec{u}(t)\quad\text{za svaki}\quad t\in\mathrm{I}$$

je vektorska funkcija skalarnog argumenta.



Time je vektorska funkcija $\vec{u}=\vec{u}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ zadana sa tri skalarne funkcije $u_1(t)$, $u_2(t)$ i $u_3(t)$ i pišemo:

$$\boxed{\vec{u}(t)=u_1(t)\cdot\vec{e}_1+u_2(t)\cdot\vec{e}_2+u_3(t)\cdot\vec{e}_3}\qquad\text{ili kraće:}\qquad\boxed{\vec{u}(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{3}u_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e}_{\mathrm{i}}}\,.$$

✎ Primijetimo da za neki fiksni $t_{\mathrm{j}}\in\mathrm{I}$ imamo da su $u_1(t_{\mathrm{j}})$, $u_2(t_{\mathrm{j}})$ i $u_3(t_{\mathrm{j}})$ skalari te da je $\vec{u}(t_{\mathrm{j}})$ vektor (tj. radij-vektor), kojemu je jednoznačno pridružena točka $\mathrm{T}_{\mathrm{j}}\left(u_1(t_{\mathrm{j}}),u_2(t_{\mathrm{j}}),u_3(t_{\mathrm{j}})\right)$.

Općenito, ako je dano preslikavanje $\vec{u}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n}\geq 2$, onda je vektorska funkcija $\vec{u}=\vec{u}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ zadana sa n skalarnih funkcija $u_1(t)$, $u_2(t)$,…, $u_{\mathrm{n}}(t)$ sljedećim izrazom:

$$\vec{u}(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} u_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}, \tag{20}$$

gdje je $\{\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_{\mathrm{n}}}\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Skalarne funkcije $u_1(t)$, $u_2(t)$, …, $u_{\mathrm{n}}(t)$ se nazivaju **koordinatne funkcije vektorske funkcije** $\vec{u}(t)$.

Komentar 1.1.2

Vektorskoj funkciji $\vec{u}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n}\geq 2$ zadanoj sa $\vec{u}(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} u_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}$, $t\in\mathrm{I}$ jednoznačno korespondira funkcija $u:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $u=u(t)$, koja svakom elementu $t\in\mathrm{I}$ pridružuje n-torku $(u_1(t),u_2(t),...,u_{\mathrm{n}}(t))\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ skalarnih funkcija. Jasno, funkcija $u=u(t)$, $t\in\mathrm{I}$ je zadana sa n skalarnih funkcija $u_{\mathrm{i}}(t)$, $1\leq\mathrm{i}\leq\mathrm{n}$ izrazom:

$$\boxed{u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_{\mathrm{n}}(t))}\,.$$

Za fiksni $t_{\mathrm{j}}\in\mathrm{I}$ imamo da su $u_1(t_{\mathrm{j}})$, $u_2(t_{\mathrm{j}})$,…, $u_{\mathrm{n}}(t_{\mathrm{j}})$ koordinate točke $\mathrm{T_j}$ i pišemo:

$$\mathrm{T_j}\left(u_1(t_{\mathrm{j}}),u_2(t_{\mathrm{j}}),...,u_{\mathrm{n}}(t_{\mathrm{j}})\right).$$

✎ Neka je $\{\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_{\mathrm{n}}}\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ i neka su $\vec{u},\vec{v}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n}\geq 2$ dvije vektorske funkcije zadane sa:

$$\vec{u}(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} u_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}},\quad \vec{v}(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} v_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}\quad \text{za svaki } t\in\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}.$$

Tada se skalarni produkt $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vektorskih funkcija $\vec{u}=\vec{u}(t)$ i $\vec{v}=\vec{v}(t)$ definira uobičajeno kao i skalarni produkt bilo koja dva vektora. Drugim rječima za svaki $t\in\mathrm{I}$ imamo:

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})(t)=\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)$$

gdje je:
$$\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} u_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} v_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left(u_{\mathrm{i}}(t)\cdot v_{\mathrm{i}}(t)\right)$$

ili raspisano

$$\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)=u_1(t)\cdot v_1(t)+u_2(t)\cdot v_2(t)+\cdots+u_{\mathrm{n}}(t)\cdot v_{\mathrm{n}}(t). \tag{21}$$

Pritom su skalarne funkcije $u_1(t)$, $u_2(t)$,…, $u_{\mathrm{n}}(t)$ koordinatne funkcije vektorske funkcije $\vec{u}(t)$, odnosno skalarne funkcije $v_1(t)$, $v_2(t)$,…, $v_{\mathrm{n}}(t)$ su koordinatne funkcije vektorske funkcije $\vec{v}(t)$. Očito je da vrijedi:

(i) $\vec{u}(t)+\vec{v}(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} u_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} v_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left(u_{\mathrm{i}}(t)+v_{\mathrm{i}}(t)\right)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}$,

(ii) $\lambda\cdot\vec{u}(t)+\mu\cdot\vec{v}(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda\cdot u_i(t)\cdot\vec{e}_i+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu\cdot v_i(t)\cdot\vec{e}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda\cdot u_i(t)+\mu\cdot v_i(t)\right)\cdot\vec{e}_i,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$

✐ Specijalno za $n=3$ imamo da su $\vec{u},\vec{v}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ dvije vektorske funkcije zadane sa:

$$\vec{u}(t)=\sum_{i=1}^{3}u_i(t)\cdot\vec{e}_i,\qquad \vec{v}(t)=\sum_{i=1}^{3}v_i(t)\cdot\vec{e}_i\qquad \text{za svaki } t\in\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R},$$

gdje je $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Tada se vektorski produkt $\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)$ vektorskih funkcija $\vec{u}(t)$ i $\vec{v}(t)$ definira uobičajeno kao i vektorski produkt bilo koja dva vektora, tj. $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)(t)=\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)$ za svaki $t\in\mathrm{I}$, gdje je:

$$\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ u_1(t) & u_2(t) & u_3(t)\\ v_1(t) & v_2(t) & v_3(t)\end{vmatrix}. \tag{22}$$

Analogno se mješoviti produkt triju vektorskih funkcija $\vec{u},\vec{v},\vec{w}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ računa po formuli:

$$\left(\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t)\right)=\begin{vmatrix}u_1(t) & u_2(t) & u_3(t)\\ v_1(t) & v_2(t) & v_3(t)\\ w_1(t) & w_2(t) & w_3(t)\end{vmatrix}, \tag{23}$$

gdje je $\left(\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t)\right)=\left(\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)\right)\cdot\vec{w}(t)=\vec{u}(t)\cdot\left(\vec{v}(t)\times\vec{w}(t)\right)$.

Napomena:

Formule za višestruke produkte vektorskih funkcija analogne su formulama za višestuke produkte vektora (usporediti s formulama na str. 9-11).

Limes ili granična vrijednost vektorske funkcije $\vec{u}=\vec{u}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ definira se na analogan način kao i limes skalarne funkcije.

Definicija 1.1.3

Za vektor $\vec{a}$ kažemo da je **limes vektorske funkcije** $\vec{u}=\vec{u}(t)$ u točki $t_0\in\mathrm{I}$ i pišemo:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{u}(t)=\vec{a} \tag{24}$$

ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji $\delta(\varepsilon)>0$ takav da iz $0<|t-t_0|<\delta(\varepsilon)$ proizlazi $\left|\vec{u}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon$.

Neka je vektorska funkcija $\vec{u}=\vec{u}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ zadana sa: $\vec{u}(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(t)\cdot\vec{e}_i$, $n\geq 2$.

Tada primjenom svojstva limesa proizlazi:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{u}(t)=\lim_{t\to t_0}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}u_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lim_{t\to t_0}u_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}a_{\mathrm{i}}\cdot\vec{e_{\mathrm{i}}}=\vec{a},$$

gdje je $a_{\mathrm{i}}=\lim_{t\to t_0}u_{\mathrm{i}}(t)$ za svaki $1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}$, $\mathrm{n}\ge 2$.

Jasno, skalarne funkcije $u_1(t)$, $u_2(t),\ldots,$ $u_{\mathrm{n}}(t)$ su koordinatne funkcije vektorske funkcije $\vec{u}(t)$, a skalari a_1, $a_2,\ldots,$ a_{n} su pravokutne koordinate vektora $\vec{a}$.

Dakle, vektorska funkcija $\vec{u}=\vec{u}(t)$, $t\in \mathrm{I}$ ima limes u točki t_0 ako sve njene koordinatne (skalarne) funkcije $u_1(t)$, $u_2(t),\ldots,$ $u_{\mathrm{n}}(t)$ imaju limes u točki t_0

Neka je $t\in\mathrm{I}$ neki fiksni realan broj i neka je $\Delta t>0$ takav realan broj da je $(t+\Delta t)\in\mathrm{I}$. Tada se realan broj $\Delta t>0$ zove **prirast skalalarnog argumenta** ***t***.
$\vec{u}(t)$ i $\vec{u}(t+\Delta t)$ su vrijednosti vektorske funkcije $\vec{u}$ s obzirom na odabrane argumente t i $t+\Delta t$, stoga je $\Delta\vec{u}(t)=\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)$ **prirast vektorske funkcije** $\vec{u}$.

Definicija 1.1.4

Za vektorsku funkciju $\vec{u}=\vec{u}(t)$ kažemo da je **neprekidna u točki** $t_0\in\mathrm{I}$ ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji $\delta(\varepsilon)>0$ takav da vrijedi:

$$\text{iz}\quad 0<|t-t_0|<\delta(\varepsilon)\quad\text{slijedi}\quad \left|\vec{u}(t)-\vec{u}(t_0)\right|<\varepsilon .$$

Drugim rječima, vektorska funkcija $\vec{u}=\vec{u}(t)$ je neprekidna u točki t_0 ako $\left|\Delta\vec{u}(t)\right|\to 0$ kada $\Delta t\to 0$, gdje je $t=t_0+\Delta t$.

Komentar 1.1.5

Vektorska funkcija $\vec{u}=\vec{u}(t)$ je neprekidna u točki t_0 ako su sve njene koordinatne funkcije $u_1(t)$, $u_2(t),\ldots,$ $u_{\mathrm{n}}(t)$, $\mathrm{n}\ge 2$ neprekidne u točki t_0.

Analogno, vektorska funkcija $\vec{u}=\vec{u}(t)$ je diferencijabilna ako su sve njene koordinatne funkcije $u_1(t)$, $u_2(t),\ldots,$ $u_{\mathrm{n}}(t)$, $\mathrm{n}\ge 2$ diferencijabilne.

Definicija 1.1.6

Derivacija vektorske funkcije $\vec{u}=\vec{u}(t)$ po skalarnom argumentu t je nova vektorska funkcija $\vec{u}'(t)$ definirana sa:

$$\boxed{\vec{u}'(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)}{\Delta t}}\,. \tag{25}$$

Ako su $u_1(t),\ u_2(t),\ldots,\ u_\mathrm{n}(t)$, $\mathrm{n}\ge 2$ koordinatne (skalarne) funkcije vektorske funkcije $\vec{u}=\vec{u}(t)$, $t\in \mathrm{I}$, onda je:

$$\vec{u}\,'(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} u_\mathrm{i}'(t)\cdot\vec{e_\mathrm{i}}=u_1'(t)\cdot\vec{e_1}+u_2'(t)\cdot\vec{e_2}+\cdots+u_\mathrm{n}'(t)\cdot\vec{e_\mathrm{n}},$$

gdje je: $u_\mathrm{i}'(t)=\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{i}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta u_\mathrm{i}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{u_\mathrm{i}(t+\Delta t)-u_\mathrm{i}(t)}{\Delta t}$ za svaki $1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}$, $\mathrm{n}\ge 2$.

Jasno, _derivacija vektorske funkcije_ $\vec{u}=\vec{u}(t)$ _u točki_ t_0 je vektor $\vec{u}\,'(t_0)$ definiran sa:

$$\boxed{\vec{u}\,'(t_0)=\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}(t_0+\Delta t)-\vec{u}(t_0)}{\Delta t}}\ .$$

Definicija 1.1.7

$\boxed{\mathrm{d}\vec{u}(t)=\vec{u}\,'(t)\cdot\mathrm{d}t}$ se zove **diferencijal vektorske funkcije** $\vec{u}=\vec{u}(t)$.

Svojstva deriviranja vektorskih funkcija:

(i) $\left(\vec{u}(t)\pm\vec{v}(t)\right)'=\vec{u}\,'(t)\pm\vec{v}\,'(t)$

(ii) $\left(m(t)\cdot\vec{u}(t)\right)'=m'(t)\cdot\vec{u}(t)+m(t)\cdot\vec{u}\,'(t)$, gdje je $m(t)$ skalarna funkcija

(iii) $\left(\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right)'=\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}\,'(t)$

(iv) $\left(\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)\right)'=\vec{u}\,'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}\,'(t)$

(v) $\left(\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t)\right)'=\left(\vec{u}\,'(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t)\right)+\left(\vec{u}(t),\vec{v}\,'(t),\vec{w}(t)\right)+\left(\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}\,'(t)\right)$

Derivacija višeg reda vektorske funkcije $\vec{u}=\vec{u}(t)$ definira se induktivno sa:

$$\boxed{\vec{u}^{(\mathrm{k})}(t)=\left(\vec{u}^{(\mathrm{k}-1)}(t)\right)'=\frac{\mathrm{d}^\mathrm{k}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t^\mathrm{k}}}\quad \text{za svaki } \mathrm{k}=1,2,3,\ldots,\mathrm{n}. \tag{26}$$

Iz formule (26) proizlazi:

$$\vec{u}\,'(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$\vec{u}\,''(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{u}\,'(t)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}^2\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t^2},$$

$$\vec{u}\,'''(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{u}\,''(t)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t^2}\right)=\frac{\mathrm{d}^3\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t^3},\ \ldots$$

♦ Provježbati zadatke u Frančuli str. 20-22.

1.2 Vektorska funkcija dviju skalarnih varijabli

Definicija 1.2.1

Neka je $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathrm{S} \neq \varnothing$ neprazan podskup ravnine $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Svako preslikavanje $\vec{u} : \mathrm{S} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \geq 3$ sa skupa S u vektorski prostor $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ takvo da je svakom elementu $(t,s) \in \mathrm{S}$ pridružen vektor $\vec{u}(t,s) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ naziva se **vektorska funkcija dviju skalarnih varijabli** i označava se sa: $\vec{u} = \vec{u}(t,s)$, za svaki $(t,s) \in \mathrm{S}$.

Skup $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathrm{S} \neq \varnothing$ je domena vektorske funkcije $\vec{u}$, a skup $\vec{u}(\mathrm{S}) = \left\{ \vec{u}(t,s) \mid (t,s) \in \mathrm{S} \right\} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \geq 3$ se naziva slika vektorske funkcije $\vec{u}$.

✐ Neka je $\left\{ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_{\mathrm{n}}} \right\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \geq 3$ i neka je $\vec{u} : \mathrm{S} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Vektorska funkcija $\vec{u} = \vec{u}(t,s)$, $(t,s) \in \mathrm{S}$ zadaje se sa n skalarnih funkcija (po dvijema varijablama) $u_1(t,s)$, $u_2(t,s), \ldots, u_{\mathrm{n}}(t,s)$ ovako: $\boxed{\vec{u}(t,s) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} u_{\mathrm{i}}(t,s) \cdot \overrightarrow{e_{\mathrm{i}}}}$ ili raspisano:

$$\boxed{\vec{u}(t,s) = u_1(t,s) \cdot \overrightarrow{e_1} + u_2(t,s) \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + u_{\mathrm{n}}(t,s) \cdot \overrightarrow{e_{\mathrm{n}}}}, \ \mathrm{n} \geq 3.$$

Skalarne funkcije $u_1(t,s)$, $u_2(t,s), \ldots, u_{\mathrm{n}}(t,s)$ se nazivaju **koordinatne funkcije vektorske funkcije** $\vec{u}(t,s)$. Jasno, za neku fiksnu točku $(t_{\mathrm{j}}, s_{\mathrm{j}}) \in \mathrm{S}$ imamo da su $u_1(t_{\mathrm{j}}, s_{\mathrm{j}})$, $u_2(t_{\mathrm{j}}, s_{\mathrm{j}}), \ldots, u_{\mathrm{n}}(t_{\mathrm{j}}, s_{\mathrm{j}})$ skalari te da je $\vec{u}(t_{\mathrm{j}}, s_{\mathrm{j}})$ vektor (tj. radij-vektor), kojemu je jednoznačno pridružena točka $\mathrm{T}_{\mathrm{j}}\left(u_1(t_{\mathrm{j}}, s_{\mathrm{j}}), u_2(t_{\mathrm{j}}, s_{\mathrm{j}}), ..., u_{\mathrm{n}}(t_{\mathrm{j}}, s_{\mathrm{j}})\right)$, $\mathrm{n} \geq 3$.

Vektorska funkcija $\vec{u} = \vec{u}(t,s)$, $(t,s) \in \mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ je diferencijabilna (tj. neprekinuto derivabilna) ako sve njene koordinatne funkcije $u_{\mathrm{i}}(t,s)$, $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$, $\mathrm{n} \geq 3$, imaju neprekidne parcijalne derivacije po varijablama *t* i *s*.

Definicija 1.2.2

Parcijalne derivacije (prvog reda) vektorske funkcije $\vec{u} : \mathrm{S} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\vec{u} = \vec{u}(t,s)$, $(t,s) \in \mathrm{S}$ su nove vektorske funkcije definirane sa:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_t(t,s) &= \frac{\partial \vec{u}(t,s)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t, s) - \vec{u}(t,s)}{\Delta t}, \\ \vec{u}_s(t,s) &= \frac{\partial \vec{u}(t,s)}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{u}(t, s+\Delta s) - \vec{u}(t,s)}{\Delta s}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Pritom se $\boxed{\mathrm{d}\vec{u}(t,s)=\vec{u}_t(t,s)\cdot\mathrm{d}t+\vec{u}_s(t,s)\cdot\mathrm{d}s}$ ili kraće $\boxed{\mathrm{d}\vec{u}=\vec{u}_t\cdot\mathrm{d}t+\vec{u}_s\cdot\mathrm{d}s}$ zove **(totalni) diferencijal 1. reda vektorske funkcije** $\vec{u}=\vec{u}(t,s)$.

✎ **Parcijalne derivacije višeg reda vektorske funkcije** $\vec{u}=\vec{u}(t,s)$ definiraju se induktivno sa:

$$\vec{u}_{tt}(t,s)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}_t(t,s)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{u}(t,s)}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2\vec{u}(t,s)}{\partial t^2},$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_{ts}(t,s)&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\vec{u}_t(t,s)\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\vec{u}(t,s)}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2\vec{u}(t,s)}{\partial s\partial t},\\ \vec{u}_{st}(t,s)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}_s(t,s)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{u}(t,s)}{\partial s}\right)=\frac{\partial^2\vec{u}(t,s)}{\partial t\partial s},\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{\vec{u}_{ts}(t,s)=\vec{u}_{st}(t,s)}.$$

$$\vec{u}_{ss}(t,s)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\vec{u}_s(t,s)\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\vec{u}(t,s)}{\partial s}\right)=\frac{\partial^2\vec{u}(t,s)}{\partial s^2},$$

$$\vec{u}_{ttt}(t,s)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}_{tt}(t,s)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\vec{u}(t,s)}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial^3\vec{u}(t,s)}{\partial t^3},$$

$$\vec{u}_{tts}(t,s)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\vec{u}_{tt}(t,s)\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\vec{u}(t,s)}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial^3\vec{u}(t,s)}{\partial s\partial t^2},$$

$$\vec{u}_{sst}(t,s)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}_{ss}(t,s)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\vec{u}(t,s)}{\partial s^2}\right)=\frac{\partial^3\vec{u}(t,s)}{\partial t\partial s^2},$$

$$\vec{u}_{sss}(t,s)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\vec{u}_{ss}(t,s)\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\vec{u}(t,s)}{\partial s^2}\right)=\frac{\partial^3\vec{u}(t,s)}{\partial s^3},\ \ldots$$

Pritom je: $\vec{u}_{tst}(t,s)=\vec{u}_{tts}(t,s)=\vec{u}_{stt}(t,s)$,

$\vec{u}_{sts}(t,s)=\vec{u}_{sst}(t,s)=\vec{u}_{tss}(t,s)$.