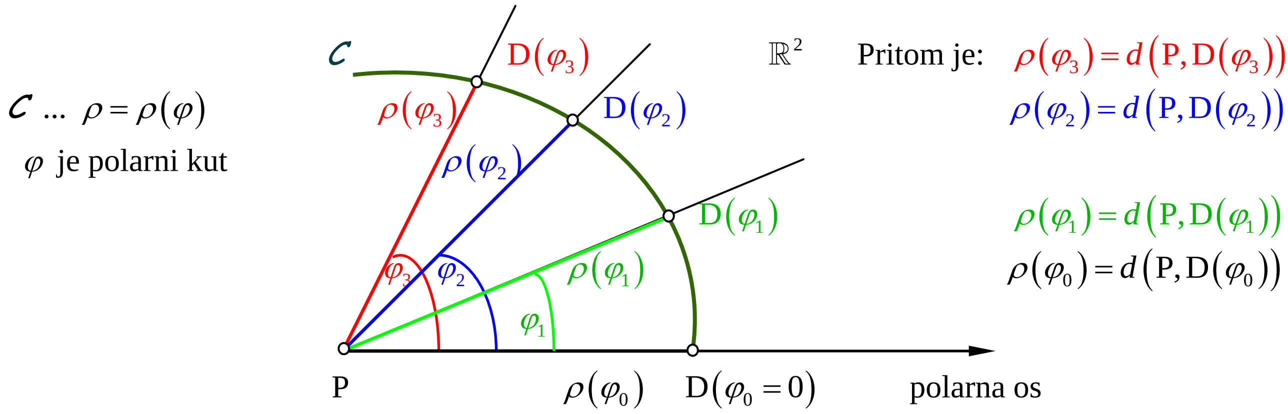
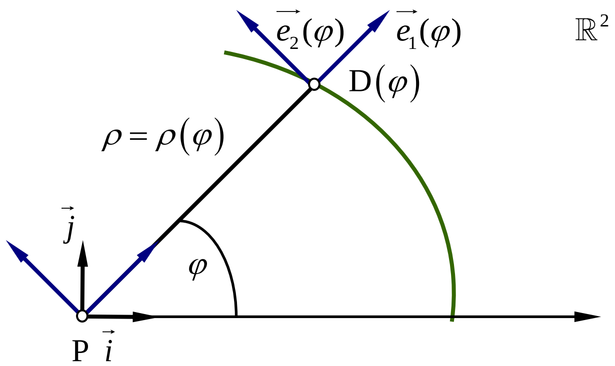
Dodatak - prijelaz iz polarnog u pravokutni koordinatni sustav ravnine

Pretpostavimo da je krivulja $\mathcal{C}$ zadana u polarnom sustavu jednadžbom $\rho=\rho(\varphi)$, gdje je φ polarni kut. Uočimo da je $\rho=\rho(\varphi)$ skalarna funkcija u varijabli φ.
Polarni sustav određen je točkom P (koju zovemo pol) i polarnom osi (koja prolazi točkom P).



slika 1

Zanima nas kako glasi vektorska jednadžba krivulje $\mathcal{C}$ ... $\rho=\rho(\varphi)$, odnosno kako iz polarnog sustava prelazimo na pravokutni koordinatni sustav ravnine.
U polu P nanesemo jedinične vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$, odnosno $\{\vec{i},\vec{j}\}$ ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}^2$, kao što je prikazano na slici 2. Jasno, polarni kut φ je dan sa: $\boxed{\varphi=\measuredangle\left(\vec{e_1}(\varphi),\vec{i}\right)}$.



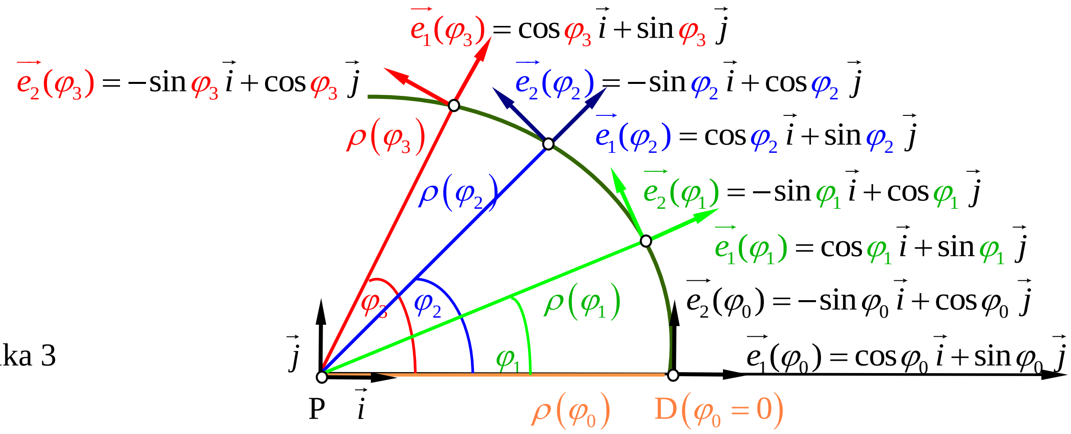
slika 2

Tada je u polu jednoznačno određen jedinični vektor $\underline{\vec{e_1}(\varphi)=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}}$, kojeg prenosimo u točku $\mathrm{D}(\varphi)$ krivulje $\mathcal{C}$ ... $\rho=\rho(\varphi)$.

Budući da je $\left|\vec{e_1}(\varphi)\right|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1$ $(=const.)$ za svaki φ, tada primjenom leme 2.4.1 (str.46) imamo da je $\vec{e_1}(\varphi)\cdot\vec{e_1}\,'(\varphi)=0$ ili $\vec{e_1}(\varphi)\perp\vec{e_1}\,'(\varphi)$, stoga dobivamo da je vektor $\underline{\vec{e_2}(\varphi)=\vec{e_1}\,'(\varphi)=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j}}$ ortogonalan na vektor $\vec{e_1}(\varphi)$.

Time smo u točki $\mathrm{D}(\varphi)$ krivulje $\mathcal{C}$ ... $\rho=\rho(\varphi)$ uveli novi koordinatni sustav, koji se sastoji od jediničnih vektora $\vec{e}_1(\varphi)$ i $\vec{e}_2(\varphi)$. Pritom je $\left|\vec{e}_2(\varphi)\right|=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=1$.

Navedeni postupak se provodi za bilo koju točku $\mathrm{D}(\varphi)$ krivulje $\mathcal{C}$ ... $\rho=\rho(\varphi)$.
Drugim riječima u svakoj točki krivulje uvodi se koordinatni sustav, koji se sastoji od međusobno ortogonalnih jediničnih vektora $\vec{e}_1(\varphi)$ i $\vec{e}_2(\varphi)$ (vidi sliku 3). Jasno da jedinični vektori $\vec{e}_1(\varphi)$ i $\vec{e}_2(\varphi)$ ovise o kutu φ za koji je skalarna funkcija $\rho=\rho(\varphi)$ definirana.



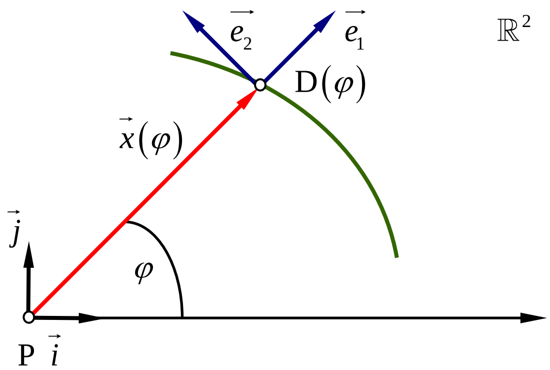
slika 3

Sada se lako može vidjeti sljedeće:

ako skalarnu funkciju $\rho=\rho(\varphi)$ pomnožimo sa jediničnim vektorom $\vec{e}_1(\varphi)=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}$, onda dobivamo vektorsku funkciju $\boxed{\vec{x}(\varphi)=\rho(\varphi)\cdot\vec{e}_1(\varphi)}$
koja je u koordinatnom zapisu dana sa:

$$\boxed{\vec{x}(\varphi)=\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi\,\vec{i}+\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\,\vec{j}},$$

gdje su $\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi$ i $\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$ koordinatne funkcije vektorske funkcije $\vec{x}(\varphi)$ (vidi sliku 4).

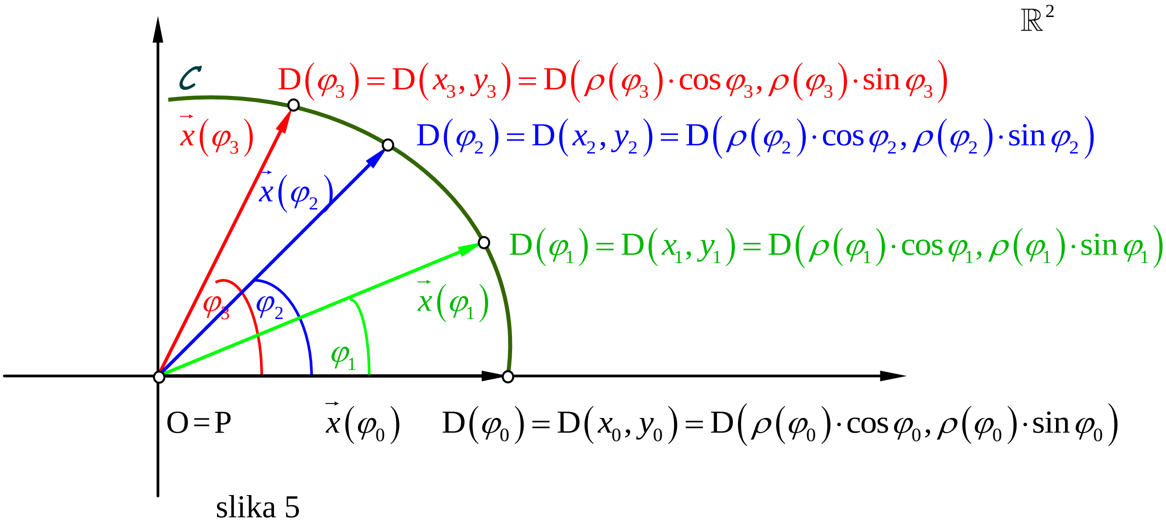


slika 4

Na osnovu rečenog zaključujemo da je $\vec{x}(\varphi)=\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi\,\vec{i}+\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\,\vec{j}$ vektorska jednadžba krivulje $\mathcal{C}$, koja je bila početno zadana u polarnom sustavu skalarnom funkcijom $\rho=\rho(\varphi)$.

Pritom su $\quad x(\varphi)=\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi,\quad y(\varphi)=\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$
ili kraće $\quad x=\rho\cdot\cos\varphi,\quad y=\rho\cdot\sin\varphi$
parametarske jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$.

Konkretno za fiksirane izbore kuta φ_i, kao što je prikazano na slici 5, imamo da svakoj točki $D(\varphi_i)$ krivulje $\mathcal{C}$ korenspondira odgovarajući radij-vektor $\vec{x}(\varphi_i)=\rho(\varphi_i)\cdot\cos\varphi_i\,\vec{i}+\rho(\varphi_i)\cdot\sin\varphi_i\,\vec{j}$
Na osnovu čega imamo: $D(\varphi_i)=D(x_i,y_i)$, gdje je: $x_i=\rho(\varphi_i)\cdot\cos\varphi_i$, $y_i=\rho(\varphi_i)\cdot\sin\varphi_i$.

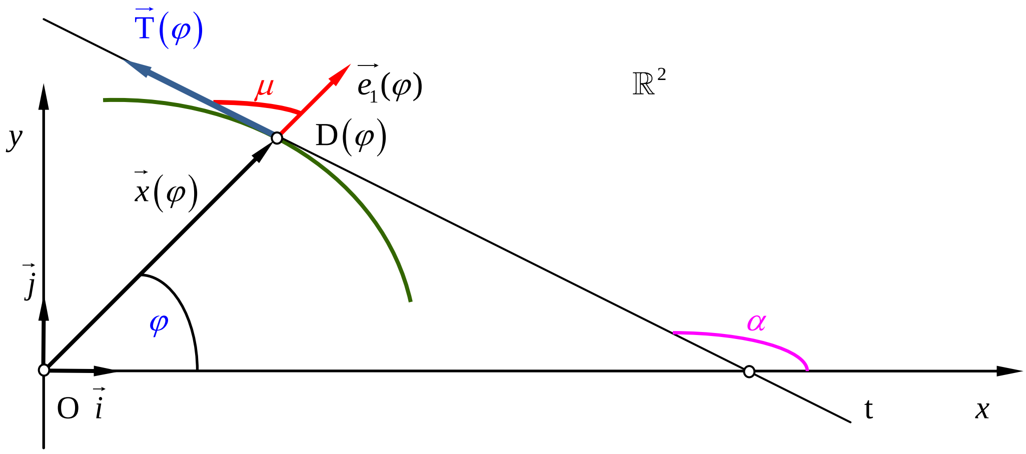


slika 5

Uzimajući u obzir da se $\vec{x}(\varphi)=\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi\,\vec{i}+\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\,\vec{j}$ kraće zapisuje: $\vec{x}(\varphi)=\rho(\varphi)\cdot\vec{e_1}(\varphi)$ te da je: $\vec{x}\,'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cdot\vec{e_1}(\varphi)+\rho(\varphi)\cdot\vec{e_1}\,'(\varphi)$, odnosno: $\vec{x}\,'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cdot\vec{e_1}(\varphi)+\rho(\varphi)\cdot\vec{e_2}(\varphi)$, odakle je:

$\left|\vec{x}\,'(\varphi)\right|=\sqrt{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}$, dobivamo da je $\boxed{\vec{T}(\varphi)=\dfrac{\vec{x}\,'(\varphi)}{\left|\vec{x}\,'(\varphi)\right|}=\dfrac{\rho'(\varphi)\cdot\vec{e_1}(\varphi)+\rho(\varphi)\cdot\vec{e_2}(\varphi)}{\sqrt{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}}}$

<u>jedinični vektor tangente</u> na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u proizvoljnoj točki $D(\varphi)$ te krivulje (slika 6).



slika 6

Pritom je $\boxed{\mu=\measuredangle\left(\vec{T}(\varphi),\vec{e_1}(\varphi)\right)}$ kut između jediničnog vektora tangente i jediničnog vektora $\vec{e_1}(\varphi)$ u proizvoljnoj točki $D(\varphi)$ krivulje $\mathcal{C}$, stoga je: $\underline{\cos\mu=\vec{T}(\varphi)\cdot\vec{e_1}(\varphi)}$
odnosno:

$$\cos\mu = \vec{\mathrm{T}}(\varphi)\cdot\vec{e}_1(\varphi) = \frac{\rho'(\varphi)\cdot\vec{e}_1(\varphi)+\rho(\varphi)\cdot\vec{e}_2(\varphi)}{\sqrt{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}}\cdot\vec{e}_1(\varphi) = \frac{\rho'(\varphi)\cdot\overbrace{\vec{e}_1(\varphi)\cdot\vec{e}_1(\varphi)}^{=1}+\rho(\varphi)\cdot\overbrace{\vec{e}_2(\varphi)\cdot\vec{e}_1(\varphi)}^{=0}}{\sqrt{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}}$$

ili: $$\boxed{\cos\mu = \frac{\rho'(\varphi)}{\sqrt{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}}}\,.$$

Time je:

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{\sin\mu}{\cos\mu} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\mu}}{\cos\mu} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{(\rho'(\varphi))^2}{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}}}{\dfrac{\rho'(\varphi)}{\sqrt{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2-(\rho'(\varphi))^2}{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}}}{\dfrac{\rho'(\varphi)}{\sqrt{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}}}$$

odnosno: $\boxed{\mathrm{tg}\,\mu = \dfrac{\rho(\varphi)}{\rho'(\varphi)}}$, što se kraće zapisuje: $\boxed{\mathrm{tg}\,\mu = \dfrac{\rho}{\rho'}}$.

Kut $\mu = \measuredangle\left(\vec{\mathrm{T}}(\varphi),\vec{e}_1(\varphi)\right)$ zovemo kutom između tangente i polarnog radij-vektora.

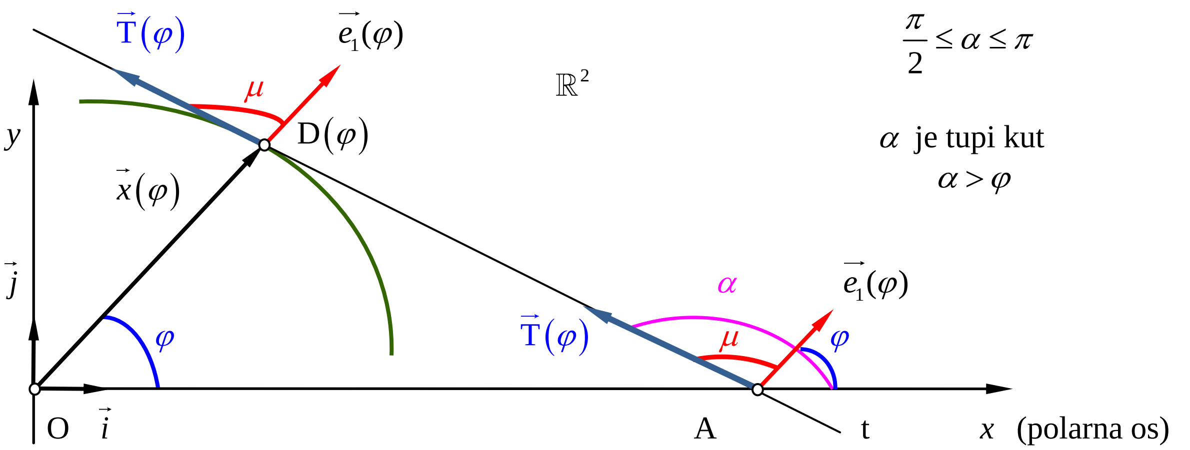
- Uočimo sada na slici 6 kut između tangente i polarne osi (x-osi), kojeg ćemo označiti sa α. Dakle imamo: $\alpha = \measuredangle\left(\vec{\mathrm{T}}(\varphi),\vec{i}\right)$ i podsjetimo se da je: $\varphi = \measuredangle\left(\vec{e}_1(\varphi),\vec{i}\right)$.

  Ako je $\boxed{\alpha > \varphi}$, onda je $\boxed{\alpha = \varphi + \mu}$ (vidi slike 7 i 8).

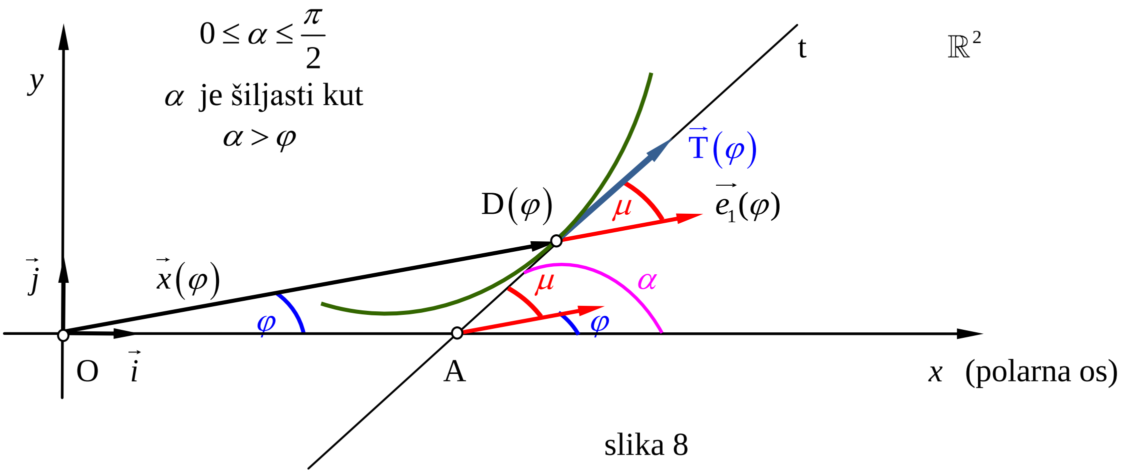
  <u>Interpretacija:</u> ako je kut između tangente i polarne osi strogo veći od polarnog kuta, onda je on jednak zbroju polarnog kuta i kuta između tangente i polarnog radij-vektora.

  Ako je $\boxed{\alpha < \varphi}$, onda je $\boxed{\alpha = \varphi - \mu}$ (vidi sliku 9).

  <u>Interpretacija:</u> ako je kut između tangente i polarne osi strogo manji od polarnog kuta, onda je on jednak razlici polarnog kuta i kuta između tangente i polarnog radij-vektora.



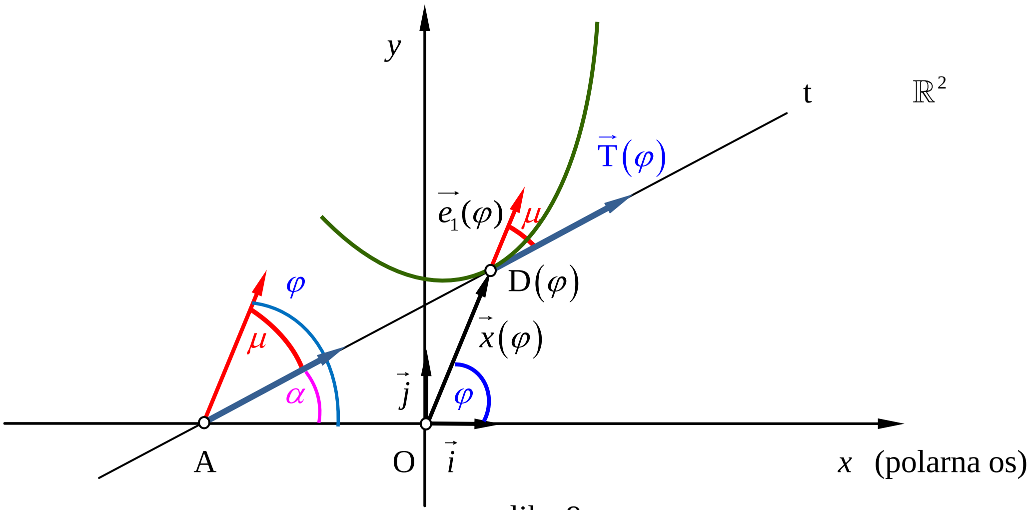
slika 7



slika 8

Pretpostavimo sada da postoji krivulja $\mathcal{C}$ zadana u polarnom sustavu jednadžbom $\rho = \rho(\varphi)$ takva da je $\alpha < \varphi$, gdje je α kut između tangente i polarne osi, a φ je polarni kut.

U ovom slučaju imamo: $\boxed{\alpha = \varphi - \mu}$, odnosno $\boxed{\varphi = \alpha + \mu}$ (vidi sliku 9).



slika 9

- Izvod formule za izračunavanje duljine luka krivulje zadane polarnom jednadžbom $\rho = \rho(\varphi)$

Neka je $\rho = \rho(\varphi)$ polarna jednadžba krivulje $\mathcal{C}$.

Tada uzimajući u obzir gore navedeno imamo da je

$$\boxed{\vec{x}(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \cos\varphi \, \vec{i} + \rho(\varphi) \cdot \sin\varphi \, \vec{j}}$$

ili kraće $\boxed{\vec{x}(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \vec{e}_1(\varphi)}$

vektorska jednadžba dane krivulje $\mathcal{C}$.

Pritom je: $\left|\vec{x}\,'(\varphi)\right| = \sqrt{\left(\rho'(\varphi)\right)^2 + \left(\rho(\varphi)\right)^2}$ (vidi str.3).

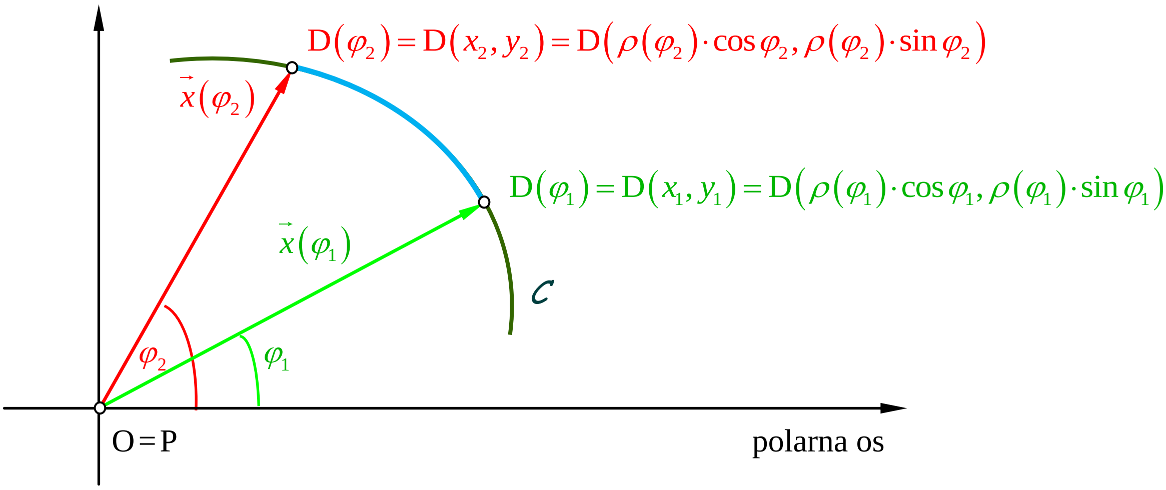
Primjenom definicije duljine luka krivulje (zadane vektorskom jednadžbom) dobivamo da se duljina luka krivulje $\mathcal{C}$ ... $\rho = \rho(\varphi)$ od točke $\mathrm{D}(\varphi_1)$ do točke $\mathrm{D}(\varphi_2)$ izračunava po formuli:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left| \vec{x}\,'(\varphi) \right| \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\rho'(\varphi)\right)^2 + \left(\rho(\varphi)\right)^2}\, \mathrm{d}\varphi$$

koju često zapisujemo u kraćem obliku:

$$\boxed{s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, \mathrm{d}\varphi}\,.$$

Točke $\mathrm{D}(\varphi_1)$ i $\mathrm{D}(\varphi_2)$ na krivulji $\mathcal{C}$ zadanoj polarnom jednadžbom $\rho = \rho(\varphi)$ korespondiraju proizvoljno odabranim fiksiranim kutevima φ_1 i φ_2 za koje je zadana krivulja dobro definirana (vidi sliku 10 i komentar 2.3.2).



slika 10