2. Regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

U ovom poglavlju definirati će se pojam krivulje, a potom i regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^n$. Pokazati će se da je bilo koja krivulja regularna ako je svaka njena točka regularna, tj. ako nema nijednu singularnu točku, kao što je šiljak, dvostruka točka s dodirom ili izolirana točka (detaljnije u dodatku: singularne točke).
Posebno će se proučavati svojstva regularnih krivulja u $\mathbb{R}^3$ te će se kao specijalan slučaj promatrati ravninske krivulje, tj. regularne krivulje u ravnini $\mathbb{R}^2$.

U nastavku ćemo vektorsku funkciju $\vec{u}$ (razmatranu u uvodu) označavati sa $\vec{x}$.

2.1 Regularna parametrizacija krivulje, reparametrizacija krivulje

Prema definiciji 1.1.1 imamo da je $\vec{x}: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (gdje je $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \neq \emptyset$) vektorska funkcija skalarnog argumenta ako je svakom elementu $t \in \mathrm{I}$ pridružen vektor $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, odnosno ako je $\vec{x} = \vec{x}(t)$ za svaki $t \in \mathrm{I}$.

Definicija 2.1.1

Kažemo da je vektorska funkcija $\vec{x}: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *klase* C^k na intervalu I, gdje je $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$ (tj. k je nenegativan cijeli broj) ako u svakoj točki tog intervala vektorska funkcija $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ima neprekidne sve derivacije reda $\leq k$.

Drugim riječima, vektorska funkcija $\vec{x} = \vec{x}(t)$ je klase C^k na intervalu I ako su $\vec{x}(t)$, $\vec{x}'(t)$, $\vec{x}''(t)$, …, $\vec{x}^{(k)}(t)$ neprekidne za svaki $t \in \mathrm{I}$. Pritom vektorsku funkciju $\vec{x}(t)$ možemo shvatiti kao $\vec{x}^{(0)}(t)$ tj. derivaciju nultog reda funkcije $\vec{x}(t)$ i možemo pisati: $\vec{x}^{(0)}(t) = \vec{x}(t)$.

Komentar 2.1.2

Primijetimo, ako je vektorska funkcija $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $t \in \mathrm{I}$ klase C^k na intervalu I, onda je ona ujedno i klase C^{k-1} na intervalu I.

Definicija 2.1.3

Kažemo da je vektorska funkcija $\vec{x}: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ *klase* C^∞ na I ako u svakoj točki intervala I vektorska funkcija $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ima neprekidnu derivaciju svakog reda.
Drugim riječima, vektorska funkcija $\vec{x} = \vec{x}(t)$ je klase C^∞ na intervalu I ako je ona klase C^k na intervalu I za svaki $k \in \mathbb{N}_0$.

Definicija 2.1.4

Vektorska funkcija $\vec{x}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n}\geq 2$ je **glatko preslikavanje** na I ako je ona klase C^{∞} na I.

Drugim riječima, vektorska funkcija $\vec{x}=\vec{x}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ je glatka funkcija na intervalu I ako ona u svakoj točki intervala I ima neprekidnu derivaciju svakog reda.

Definicija 2.1.5

Parametrizacija krivulje u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ je glatko preslikavanje $\vec{x}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ nekog nepraznog intervala $\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ u prostor $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Definicija 2.1.6

Regularna parametrizacija krivulje u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ je glatko preslikavanje $\vec{x}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ nekog nepraznog intervala $\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ u prostor $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ takvo da je $\vec{x}'(t)\neq\vec{0}$ za svaki $t\in\mathrm{I}$.

Definicija 2.1.7

Ako je $\vec{x}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ glatko preslikavanje, takvo da $\vec{x}'(t)\neq\vec{0}$ za svaki $t\in\mathrm{I}$, onda kažemo da je sa $\vec{x}=\vec{x}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ dana **vektorska jednadžba regularne krivulje** $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, tj. da je regularna krivulja $\mathcal{C}$ zadana vektorskom jednadžbom $\vec{x}=\vec{x}(t)$ za svaki $t\in\mathrm{I}$.

Napomena 2.1.8

Vektorska funkcija $\vec{x}'(t)$ je vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$, a skalarna funkcija $\left|\vec{x}'(t)\right|$ je duljina vektora tangene $\vec{x}'(t)$.

Jedinični vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ zadanu vektorskom jednadžbom $\vec{x}=\vec{x}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ je vektorska funkcija $\boxed{\vec{\mathrm{T}}(t)=\dfrac{\vec{x}'(t)}{\left|\vec{x}'(t)\right|}}$, gdje regularnost povlači: $\vec{x}'(t)\neq\vec{0}$, tj. $\left|\vec{x}'(t)\right|\neq 0$.

Neka je $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_{\mathrm{n}}\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ i neka je $\vec{x}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ parametrizacija krivulje u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Tada se vektorska jednadžba $\vec{x}=\vec{x}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ zadaje s n skalarnih funkcija (komponenti) $x_1(t)$, $x_2(t)$,…, $x_{\mathrm{n}}(t)$, $t\in\mathrm{I}$ izrazom:

$$\vec{x}(t)=x_1(t)\cdot\vec{e}_1+x_2(t)\cdot\vec{e}_2+\cdots+x_{\mathrm{n}}(t)\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}} \tag{28}$$

koji se kraće zapisuje u obliku: $\vec{x}(t)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}x_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e}_{\mathrm{i}}$.

Primijetimo da je regularna parametrizacija krivulje u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ specijalan slučaj parametrizacije krivulje u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ za koju vrijedi uvjet regularnosti. Time zaključujemo da se vektorska jednadžba regularne krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ također zadaje jednadžbom (28) uz uvjet da vrijedi: za svaki $t \in \mathrm{I}$, $\vec{x}\,'(t) \neq \vec{0}$ ili analogno $\left|\vec{x}\,'(t)\right| \neq 0$ (uvjet regularnosti).

Uočimo da iz uvjeta regularnosti direktno proizlazi:

za svaki $t \in \mathrm{I}$ postoji barem jedan $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$ takav da je $\dot{x}_{\mathrm{i}}(t) \neq 0$.

- Vektorska jednadžba (28) krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ direktno je povezana s **parametarskim jednadžbama krivulje** $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ koje su zadane s n skalarnih jednadžbi $x_{\mathrm{i}} = x_{\mathrm{i}}(t)$, $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$ za svaki $t \in \mathrm{I}$, a u raspisanom obliku glase:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ldots, \quad x_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}}(t) \tag{29}$$

za svaki $t \in \mathrm{I}$.

✐ Ako za skalarne jednadžbe (29) dodatno vrijedi uvjet: “za svaki $t \in \mathrm{I}$ postoji barem jedan $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$ takav da je $\dot{x}_{\mathrm{i}}(t) \neq 0$“, onda kažemo da su jednadžbama (29) zadane **parametarske jednadžbe regularne krivulje** $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Iz navedenog možemo zaključiti:

ako postoji barem jedan $t_0 \in \mathrm{I}$ takav da je $\vec{x}\,'(t_0) = \vec{0}$ (tj. $\dot{x}_{\mathrm{i}}(t_0) = 0$ za svaki $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$), onda je jednadžbom (28) zadana vektorska jednadžba krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ i analogno su sa skalarnim jednadžbama (29) zadane parametarske jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

✐ Uvjet regularnosti neke krivulje osigurava nam da se u svakoj točki te krivulje može postaviti jedinstveni (jedinični) vektor tangente, što ima za posljedicu da su sve točke te krivulje regularne točke ili drugim riječima da ta krivulja nema nijednu singularnu točku.

Napomena 2.1.9

Ponekad će se vektorska jednadžba (28) regularne krivulje zapisivati u obliku:

$$\vec{x}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{\mathrm{n}}(t)\right), \quad \vec{x}\,'(t) \neq \vec{0} \text{ za svaki } t \in \mathrm{I}.$$

U nastavku će se promatrati regularne krivulje, tj. regularne parametrizacije krivulja, stoga će se ponekad koristiti kraći izraz krivulja umjesto regularna krivulja i analogno parametrizacija krivulje umjesto regularne parametrizacije krivulje.

Prirodno se nameće sljedeći problem:

da li je moguće reparametrizirati regularnu parametrizaciju krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, odnosno da li je moguće reparametrizirati vektorsku jednadžbu regularne krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$?

Teorem 2.1.10

Neka je $\vec{x}:\mathrm{I}_t \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{I}_t = \langle a,b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^n$ i neka je $f:\mathrm{I}_p \to \mathrm{I}_t$ bijektivno preslikavanje klase C^∞ na $\mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle \subseteq \mathbb{R}$.

Tada je $\vec{y}:\mathrm{I}_p \to \mathbb{R}^n$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz:

Primjenom definicija 2.1.6 i 2.1.4 imamo da je $\vec{x}:\langle a,b \rangle \to \mathbb{R}^n$ glatko preslikavanje, tj. preslikavanje klase C^∞ na intervalu $\langle a,b \rangle$ takvo da je $\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in \mathrm{I}_t = \langle a,b \rangle$.

Treba dokazati da je $\vec{y}:\langle c,d \rangle \to \mathbb{R}^n$ glatko preslikavanje takvo da je $\vec{y}'(p) \neq \vec{0}$ za svaki $p \in \mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle$.

Prema pretpostavci teorema imamo da je $f:\mathrm{I}_p \to \mathrm{I}_t$ bijektivno preslikavanje klase C^∞ na intervalu $\mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle \subset \mathbb{R}$, stoga preslikavanje $\vec{y}:\mathrm{I}_p \to \mathbb{R}^n$ možemo promatrati kao kompoziciju preslikavanja $\vec{x}:\mathrm{I}_t \to \mathbb{R}^n$ i $f:\mathrm{I}_p \to \mathrm{I}_t$ (vidi sliku 1). Koristeći činjenicu da je kompozicija glatkih preslikavanja glatko preslikavanje, zaključujemo da je $\vec{y} = \vec{x} \circ f$ glatko preslikavanje na $\mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle$. (Napomenimo da je inverz glatkog preslikavanja također glatko preslikavanje).

Dakle, za svaki $p \in \mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle$ imamo: $\vec{y}(p) = \left(\vec{x} \circ f\right)(p)$, odnosno

$$\vec{y}(p) = \vec{x}\left(f(p)\right), \tag{30}$$

gdje je $f(p) = t$. Deriviranjem izraza (30), koristeći svojstvo derivacije kompozicije funkcija, dobivamo:

$$\vec{y}'(p) = \vec{x}'\left(f(p)\right) \cdot f'(p). \tag{31}$$

U nastavku treba dokazati da je $\vec{y}'(p) \neq \vec{0}$ za svaki $p \in \mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle$.

Primijetimo da je $\vec{y}'(p) \neq \vec{0}$ ako i samo ako je $\vec{x}'\left(f(p)\right) \neq \vec{0} \;\wedge\; f'(p) \neq 0$.

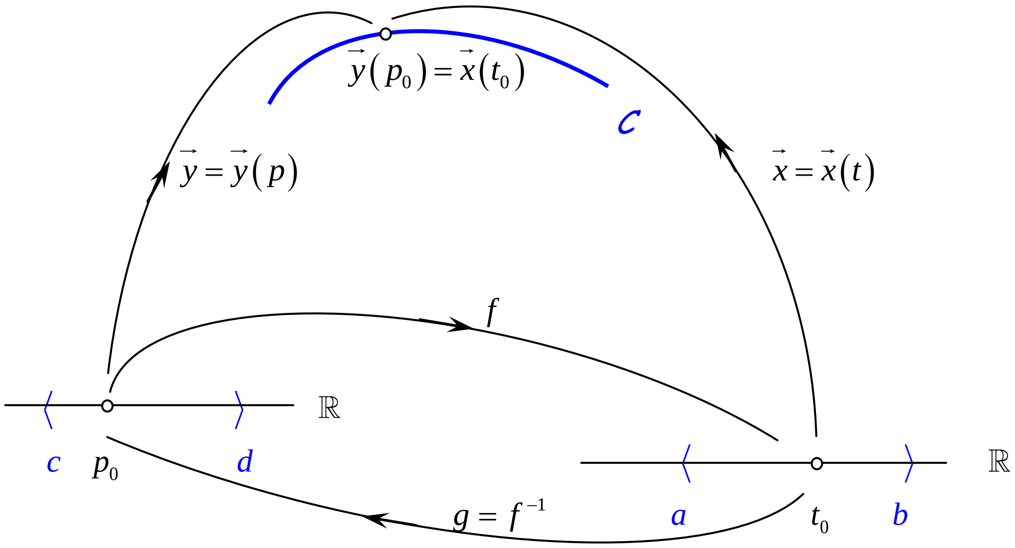
Uočimo da: $\vec{x}'\left(f(p)\right) = \vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ proizlazi iz pretpostavke da je $\vec{x}:\langle a,b \rangle \to \mathbb{R}^n$ regularna parametrizacija, stoga treba dokazati da je $f'(p) \neq 0$ za svaki $p \in \mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle$.

Koristeći pretpostavku da je $f:\mathrm{I}_p \to \mathrm{I}_t$ bijekcija, zaključujemo da postoji inverzno preslikavanje $g = f^{-1}:\mathrm{I}_t \to \mathrm{I}_p$ takvo da je $g(t) = p$ za svaki $t \in \mathrm{I}_t = \langle a,b \rangle$, pri čemu je: $f\left(g(t)\right) = t$.

Deriviranjem identiteta $f\left(g(t)\right) = t$ po parametru t (koristeći svojstvo derivacije kompozicije funkcija) dobivamo: $f'\left(g(t)\right) \cdot g'(t) = 1$, odakle direktno proizlazi da je: $f'\left(g(t)\right) \neq 0$, odnosno $f'(p) \neq 0$. Pritom se koristilo svojstvo da je $p = g(t)$ za svaki $p \in \mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle$.

Time dobivamo $\vec{y}'(p) \neq \vec{0}$ za svaki $p \in \mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle$.

Uzimajući u obzir da je $\vec{y}:\mathrm{I}_p \to \mathbb{R}^n$ glatko preslikavanje i da je $\vec{y}'(p) \neq \vec{0}$ za svaki $p \in \mathrm{I}_p = \langle c,d \rangle$, dobivamo da je $\vec{y}:\mathrm{I}_p \to \mathbb{R}^n$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^n$, što dokazuje dani teorem.



slika 1

✎ Interpretacija teorema 2.1.10:

svaka se regularna parametrizacija $\vec{x}:\mathrm{I}_t\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ krivulje $\mathcal{C}$ može reparametrizirati nekom regularnom parametrizacijom $\vec{y}:\mathrm{I}_p\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, ako postoji bijekcija $f:\mathrm{I}_p\to\mathrm{I}_t$ koja je klase C^∞ na $\mathrm{I}_p\subseteq\mathbb{R}$.

Propozicija 2.1.11

Neka je $\vec{x}:\mathrm{I}_t\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{I}_t=\langle a,b\rangle\subseteq\mathbb{R}$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ i neka je $f:\mathrm{I}_p\to\mathrm{I}_t$ bijektivno preslikavanje klase C^∞ na $\mathrm{I}_p=\langle c,d\rangle\subset\mathbb{R}$ takvo da je

$$\vec{y}(p)=\left(\vec{x}\circ f\right)(p) \quad \text{za svaki} \quad p\in\mathrm{I}_p=\langle c,d\rangle\subseteq\mathbb{R},\ \text{gdje je} \quad t=f(p).$$

Ako je:

$\vec{\mathrm{T}}(t)$ jedinični vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}$ zadanu sa $\vec{x}=\vec{x}(t)$,

$\vec{\mathrm{P}}(p)$ jedinični vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}$ zadanu sa $\vec{y}=\vec{y}(p)$,

onda je $\vec{\mathrm{P}}=\pm\vec{\mathrm{T}}$.

Dokaz:

U dokazu teoremu 2.1.10 pokazali smo da je $\vec{y}:\mathrm{I}_p\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, gdje je: $\vec{y}(p)=\vec{x}\big(f(p)\big)$ i $t=f(p)$ za svaki $p\in\mathrm{I}_p=\langle c,d\rangle$.

Nadalje, dobivamo: $\vec{y}\,'(p)=\vec{x}\,'\big(f(p)\big)\cdot f\,'(p)$ ili $\boxed{\vec{y}\,'(p)=\vec{x}\,'(t)\cdot f\,'(p)}$

(zbog pretpostavke $f(p)=t$). Time je jedinični vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ zadanu vektorskom jednadžbom $\vec{y}=\vec{y}(p)$, $p\in\mathrm{I}_p$ dan sa:

$$\vec{\mathrm{P}}(p)=\frac{\vec{y}\,'(p)}{\left|\vec{y}\,'(p)\right|}=\frac{\vec{x}\,'(t)\cdot f\,'(p)}{\left|\vec{x}\,'(t)\cdot f\,'(p)\right|}=\frac{\vec{x}\,'(t)\cdot f\,'(p)}{\left|\vec{x}\,'(t)\right|\cdot\left|f\,'(p)\right|}=\frac{\vec{x}\,'(t)}{\left|\vec{x}\,'(t)\right|}\cdot\frac{f\,'(p)}{\left|f\,'(p)\right|}. \tag{32}$$

Primijetimo da je jedinični vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}$ zadanu s $\vec{x}=\vec{x}(t)$ dan sa: $\vec{\mathrm{T}}(t)=\dfrac{\vec{x}\,'(t)}{\left|\vec{x}\,'(t)\right|}$.

Koristeći svojstvo da za bilo koju skalarnu funkciju $h=h(v)$ vrijedi: $\dfrac{h(v)}{\left|h(v)\right|}=\pm 1$, zaključujemo da je $\dfrac{f\,'(p)}{\left|f\,'(p)\right|}=\pm 1$, čime dobivamo da se identitet (32) može pisati u obliku: $\vec{\mathrm{P}}(p)=\vec{\mathrm{T}}(t)\cdot(\pm 1)$ odnosno: $\vec{\mathrm{P}}(p)=\pm\vec{\mathrm{T}}(t)$. Time je propozicija dokazana.

Primjer 2.1.12

Neka je preslikavanje $\vec{x}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ zadano vektorskom jednadžbom:

$$\vec{x}(t)=\cos t\cdot\vec{e_1}+\sin t\cdot\vec{e_2}=(\cos t,\sin t).$$

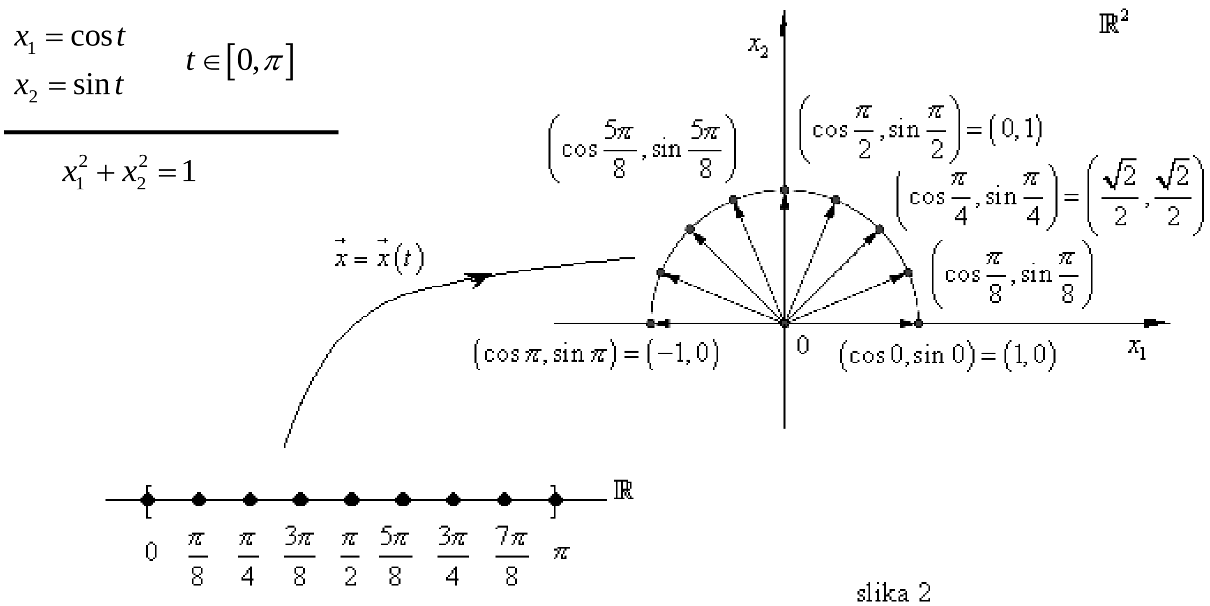
Lako se vidi da je $\vec{x}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ glatko preslikavanje, jer su funkcije sinus i kosinus klase C^∞. Pokažimo da je preslikavanje $\vec{x}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija neke krivulje.
Imamo:

$$\vec{x}\,'(t)=-\sin t\cdot\vec{e_1}+\cos t\cdot\vec{e_2}=(-\sin t,\cos t)\neq\vec{0} \quad \text{za svaki } t\in[0,\pi],$$

što povlači da je preslikavanje $\vec{x}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ zadano sa $\vec{x}(t)=\cos t\cdot\vec{e_1}+\sin t\cdot\vec{e_2}$ regularna parametrizacija neke krivulje - odredimo tu krivulju.
Uzimajući u obzir preslikavanje prikazano na slici 2, zaključujemo da je vektorskom jednadžbom

$$\vec{x}(t)=\cos t\cdot\vec{e_1}+\sin t\cdot\vec{e_2},\quad t\in[0,\pi]$$

zadana gornja jedinična polukružnica sa središtem u ishodištu x_1x_2-ravnine.



slika 2

- Primijetimo ako u zadanom preslikavanju zamijenimo domenu $[0,\pi]$ s $[0,2\pi]$, onda dobivamo da je graf regularne parametrizacije $\vec{x}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\vec{x}(t)=\cos t\cdot\vec{e_1}+\sin t\cdot\vec{e_2}$ jedinična kružnica sa središtem u ishodištu x_1x_2-ravnine.

Pritom je s $\quad \vec{\mathrm{T}}(t)=\dfrac{\vec{x}'(t)}{\left|\vec{x}'(t)\right|}=-\sin t\cdot\vec{e_1}+\cos t\cdot\vec{e_2}$

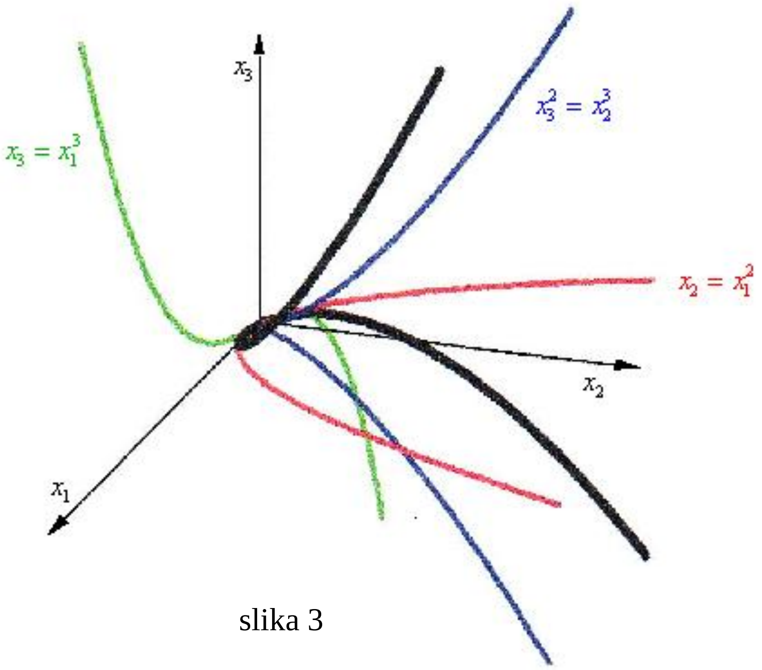
dan jedinični vektor tangente u bilo kojoj točki kružnice ako je $t\in[0,2\pi]$, odnosno gornje polukružnice ako je $t\in[0,\pi]$. Uočimo da je $\left|\vec{x}'(t)\right|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$.

Primjeri 2.1.13

Navedimo neke regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$.

(1) **Zakrenuti kubik (twisted cubic)**

$$\vec{x}(t)=t\cdot\vec{e_1}+t^2\cdot\vec{e_2}+t^3\cdot\vec{e_3}=\left(t,t^2,t^3\right),\quad t\in\mathbb{R}.$$



slika 3

Uočimo: za svaki $t\in\mathbb{R}$ te da su parametarske jednadžbe zadane krivulje dane sa:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t^2 \\ x_3 = t^3 \end{cases}$$

Projekcijom krivulje na ravninu

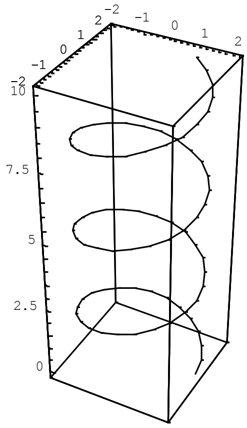
x_1x_2 dobiva se parabola $\boxed{x_2 = x_1^2}$ (što proizlazi iz $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = 0$),

x_1x_3 dobiva se kubna parabola $\boxed{x_3 = x_1^3}$ (što proizlazi iz $x_1 = t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t^3$),

x_2x_3 dobiva se semikubna parabola $\boxed{x_3^2 = x_2^3}$ (što proizlazi iz $x_1 = 0$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$).

(2) **Heliks (kružna zavojnica ili obična cilindrična spirala)**

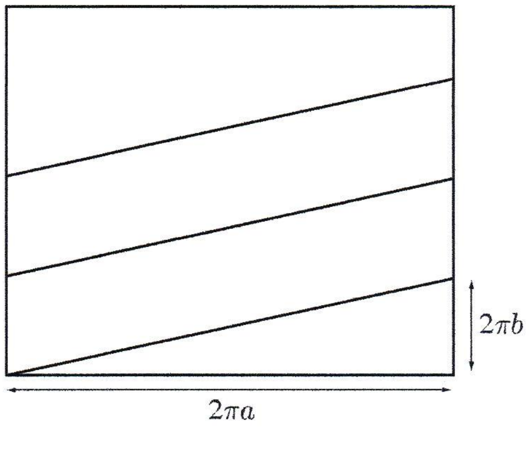
$$\vec{x}(t) = a\cos t \cdot \vec{e_1} + a\sin t \cdot \vec{e_2} + bt \cdot \vec{e_3} = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \ b > 0.$$

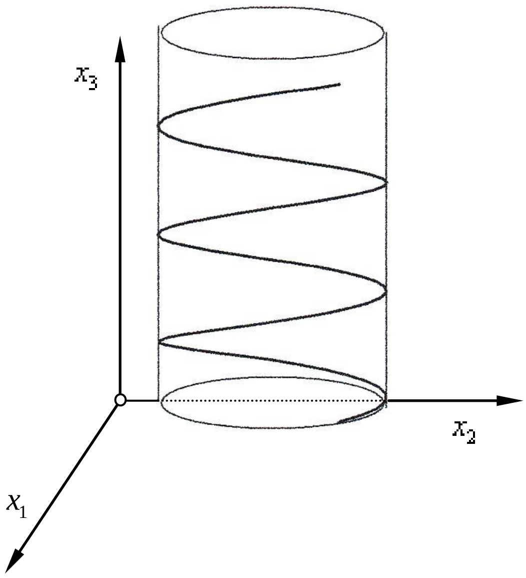


slika 4

Na slici 4 prikazan je heliks $\vec{x}(t) = 2\cos t \cdot \vec{e_1} + 2\sin t \cdot \vec{e_2} + \frac{1}{2} t \cdot \vec{e_3}$ za $t \in [0, 20]$.

Konstrukcija heliksa (slika 5):





slika 5

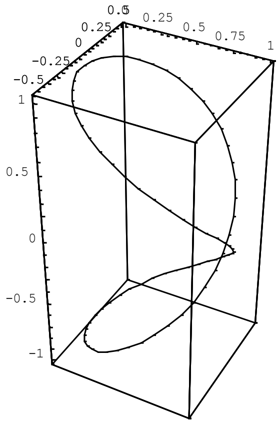
Neka je a polumjer cilindra (valjka) i neka je h visina cilindra. Ako cilindar (tj. plašt valjka) razvučemo (u ravnini), dobivamo pravokutnik, kojemu su stranice $2\pi a$ i h.

Ako na tom pravokutniku nacrtamo paralelne pravce, kojima je koeficijent smjera jednak $\frac{b}{a}$ i ako zamotamo taj pravokutnik tako da dobijemo ponovo cilindar polumjera a, onda će pravci na cilindru tvoriti heliks (tj. cilindričnu spiralu).

Ortogonalnom projekcijom heliksa na x_1x_2 ravninu dobiva se <u>kružnica polumjera *a*</u>.

(3) **Vivijanijeva krivulja**

$$\vec{x}(t) = a\sin^2 t\cdot\vec{e_1} + a\sin t\cos t\cdot\vec{e_2} + a\cos t\cdot\vec{e_3} = a\left(\sin^2 t, \sin t\cos t, \cos t\right), \quad t\in[0,2\pi], \ \ a>0\,.$$



slika 6

Na slici 6 prikazana je Vivijanova krivulja specijalno za $a=1$, tj.

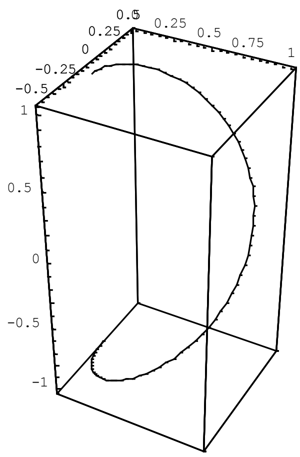
$$\vec{x}(t) = \sin^2 t\cdot\vec{e_1} + \sin t\cos t\cdot\vec{e_2} + \cos t\cdot\vec{e_3} = \left(\sin^2 t, \sin t\cos t, \cos t\right), \ \ t\in[0,2\pi].$$

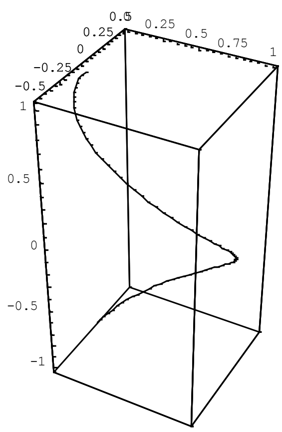
Da bismo bolje shvatili kako nastaje graf na slici 6, pogledajmo graf funkcije

$$\vec{x}(t) = \sin^2 t\cdot\vec{e_1} + \sin t\cos t\cdot\vec{e_2} + \cos t\cdot\vec{e_3} = \left(\sin^2 t, \sin t\cos t, \cos t\right), \ \ t\in[0,\pi] \quad \text{(slika 7.a)},$$

odnosno graf funkcije

$$\vec{x}(t) = \sin^2 t\cdot\vec{e_1} + \sin t\cos t\cdot\vec{e_2} + \cos t\cdot\vec{e_3} = \left(\sin^2 t, \sin t\cos t, \cos t\right), \ \ t\in[\pi,2\pi] \quad \text{(slika 7.b)}.$$





slika 7.a slika 7.b