2.2 Tangenta regularne krivulje u $\mathbb{R}^2$

U ovom odjeljku ćemo specijalno promatrati krivulje u ravnini $\mathbb{R}^2$.

Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormirana baza od $\mathbb{R}^2$ i neka je $\vec{x} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u ravnini $\mathbb{R}^2$ zadane vektorskom jednadžbom:

$$\mathcal{C} \quad \ldots \qquad \vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} = (x(t), y(t)) \qquad \text{za svaki } \ t \in \mathrm{I}.$$

Jasno, skalarne funkcije $x(t)$ i $y(t)$ su koordinatne funkcije vektorske funkcije $\vec{x}(t)$. Nadalje, iz uvjeta regularnosti parametrizacije $\vec{x} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ proizlazi: $\underline{\vec{x}\,'(t) \neq \vec{0}}$ za svaki $t \in \mathrm{I}$ ili ekvivalentno:

$$\underline{\dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} \neq \vec{0}}\,, \qquad \text{tj.} \qquad \underline{(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0,0)} \qquad \text{za svaki } t \in \mathrm{I}.$$

Pritom je vektorska funkcija

$$\boxed{\vec{\mathrm{T}}(t) = \frac{\vec{x}\,'(t)}{\left|\vec{x}\,'(t)\right|} = \frac{\dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}} \tag{33}$$

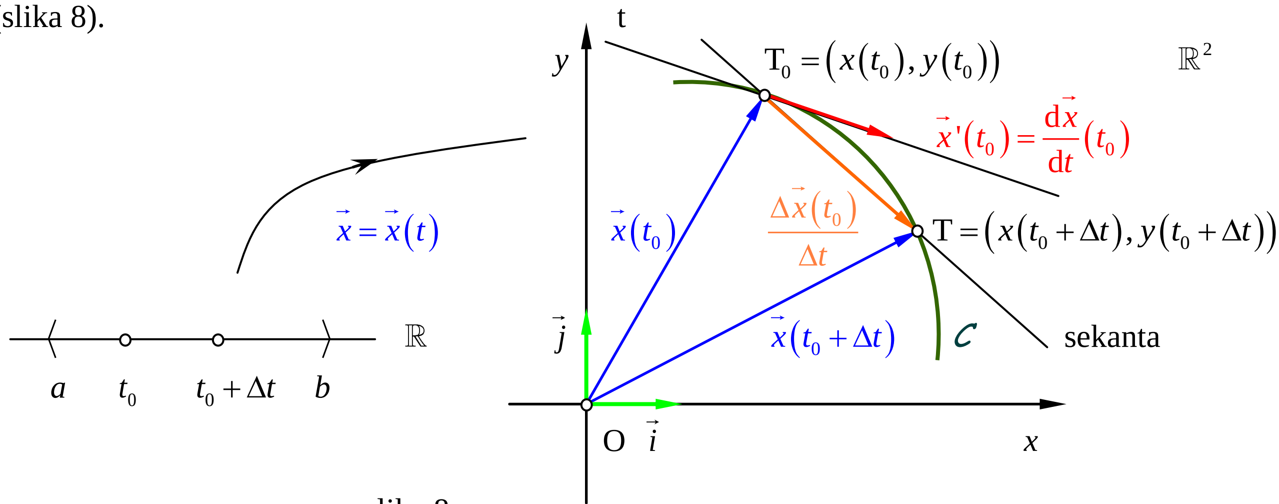
<u>jedinični vektor tangente</u> na regularnu krivulju $\mathcal{C}$.

- ➢ U nastavku ćemo odrediti vektorsku jednadžbu tangente na zadanu ravninsku regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu $\mathrm{T}_0 = (x(t_0), y(t_0))$. Pritom ćemo se najprije podsjetiti kako se dobiva vektor tangente (i njezin odgovarajući jedinični vektor) u nekoj fiksnoj točki (diralištu) regularne krivulje $\mathcal{C}$.

Neka je $t_0 \in \mathrm{I}$ fiksiran i neka je $\Delta t > 0$ <u>*prirast skalalarnog argumenta t*</u>, takav da je $(t_0 + \Delta t) \in \mathrm{I}$.

Tada su
$$\vec{x}(t_0) = x(t_0)\,\vec{i} + y(t_0)\,\vec{j} = (x(t_0), y(t_0))$$
$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) = x(t_0 + \Delta t)\,\vec{i} + y(t_0 + \Delta t)\,\vec{j} = (x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$$

vrijednosti vektorske funkcije $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ s obzirom na odabrane argumente t_0 i $t_0 + \Delta t$ (slika 8).



slika 8

Vektor $\Delta\vec{x}(t_0)=\vec{x}(t_0+\Delta t)-\vec{x}(t_0)$ je prirast vektorske funkcije u fiksnoj točki (diralištu) $\mathrm{T}_0=\left(x(t_0),y(t_0)\right)$, a $\dfrac{\Delta\vec{x}(t_0)}{\Delta t}$ je vektor sekante, koja prolazi točkama T_0 i T, gdje je T bilo koja varijabilna točka $(\neq \mathrm{T}_0)$ na krivulji $\mathcal{C}$.

U diralištu $\mathrm{T}_0=\left(x(t_0),y(t_0)\right)$ je vektor tangente $\vec{x}\,'(t_0)\neq\vec{0}$ na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ dan sa:

$$\boxed{\vec{x}\,'(t_0)=\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{x}(t_0+\Delta t)-\vec{x}(t_0)}{\Delta t}}\,.$$

S druge strane, uzimajući u obzir da je

$$\vec{x}\,'(t_0)=\dot{x}(t_0)\,\vec{i}+\dot{y}(t_0)\,\vec{j}$$

lako se vidi da je:

$$\dot{x}(t_0)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},$$

$$\dot{y}(t_0)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}.$$

Podsjetimo se, $\mathrm{d}\vec{x}(t)=\vec{x}\,'(t)\cdot\mathrm{d}t$ je *diferencijal vektorske funkcije* $\vec{x}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}$.

- Jedinični vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu $\mathrm{T}_0=\left(x(t_0),y(t_0)\right)$ je dan sa:

$$\vec{\mathrm{T}}(t_0)=\frac{\vec{x}\,'(t_0)}{\left|\vec{x}\,'(t_0)\right|}=\frac{\dot{x}(t_0)\,\vec{i}+\dot{y}(t_0)\,\vec{j}}{\sqrt{\left(\dot{x}(t_0)\right)^2+\left(\dot{y}(t_0)\right)^2}}\,.$$

Odredimo sada vektorsku jednadžbu tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu $\mathrm{T}_0=\left(x(t_0),y(t_0)\right)$. Na slici 8 prikazana je tangenta na krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu T_0. Jasno, ta tangenta je pravac nosioc vektora tangente $\vec{x}\,'(t_0)$, tj. jediničnog vektora tangente $\vec{\mathrm{T}}(t_0)$ na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu T_0. Primijetimo da tangenta na krivulju $\mathcal{C}$ ovisi o gibanju točke po toj krivulji, stoga će vektorska jednadžba tangente ovisiti o vektorskoj jednadžbi krivulje $\mathcal{C}$.

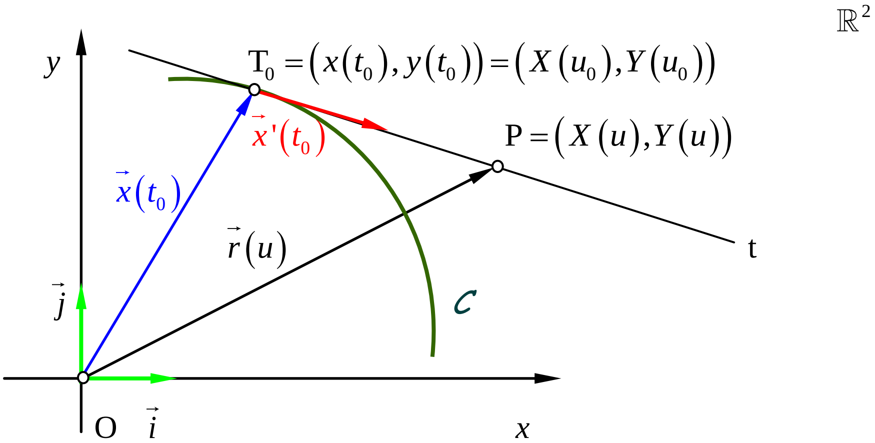
Neka je $\vec{r}:\mathrm{I}_u\to\mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija tangente (na krivulju $\mathcal{C}$) zadane vektorskom jednadžbom

$$\boxed{\mathrm{t}\ \ldots\quad \vec{r}(u)=X(u)\,\vec{i}+Y(u)\,\vec{j}}\,,\qquad \left(\vec{r}\,'(u)\neq\vec{0}\quad \text{za svaki}\quad u\in\mathrm{I}_u\subseteq\mathbb{R}\right)$$

uz uvjet da $\exists\, u_0\in\mathrm{I}_u$ takav da je: $\vec{r}(u_0)=\vec{x}(t_0)$ (gdje je $t_0\in\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$).

Danim uvjetom pretpostavlja se da je točka $\mathrm{T}_0=\left(x(t_0),y(t_0)\right)=\left(X(u_0),Y(u_0)\right)$ diralište krivulje $\mathcal{C}$ i tangente t.

Promatrajmo sada sliku 9.



slika 9

Točka $\mathrm{P} = (X(u), Y(u))$ predstavlja bilo koju varijabilnu točku na tangenti t, stoga je

$$\underline{\underline{\mathrm{t}\ \ldots \quad \vec{r}(u) = \vec{x}(t_0) + \lambda(u) \cdot \vec{x}\,'(t_0)\ ,}} \qquad u \in \mathrm{I}_u \tag{34}$$

vektorska jednadžba tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu T_0.

Uzimajući u obzir da se svaka vektorska funkcija može pisati kao linearna kombinacija odgovarajućih skalarnih funkcija s obzirom na ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}^2$, zaključujemo da se jednadžba (34) može pisati u obliku:

$$X(u)\,\vec{i} + Y(u)\,\vec{j} = \big(x(t_0) + \lambda(u) \cdot \dot{x}(t_0)\big)\,\vec{i} + \big(y(t_0) + \lambda(u) \cdot \dot{y}(t_0)\big)\,\vec{j}\,,$$

odakle dobivamo da su

$$\left.\begin{aligned} X(u) &= x(t_0) + \lambda(u) \cdot \dot{x}(t_0) \\ Y(u) &= y(t_0) + \lambda(u) \cdot \dot{y}(t_0)\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

parametarske jednadžbe dane tangente t. Eliminacijom $\lambda(u)$ iz jednadžbi (35) te uvođenjem oznaka $x := X(u)$, $y := Y(u)$, $x_0 := x(t_0)$, $y_0 := y(t_0)$ i analogno $\dot{x}_0 := \dot{x}(t_0)$, $\dot{y}_0 := \dot{y}(t_0)$ dobivamo da se jednadžba tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu $\mathrm{T}_0 = (x_0, y_0)$ može pisati u obliku:

$$\mathrm{t}\ \ldots \qquad \frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} \tag{36}$$

ili

$$y - y_0 = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}(x - x_0). \tag{37}$$

Napomena:

Primijetimo da se svaka vektorska jednadžba $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ krivulje $\mathcal{C}$ može svesti na odgovarajuću implicitnu, a potom i na eksplicitnu jednadžbu ako iz pripadnih parametarskih jednadžbi $x = x(t)$, $y = y(t)$ krivulje $\mathcal{C}$ eliminiramo parametar t.

Pretpostavimo da je $y = y(x)$ odgovarajuća <u>eksplicitna jednadžba</u> krivulje $\mathcal{C}$ s obzirom na prethodno zadanu vektorsku jednadžbu $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ te krivulje $\mathcal{C}$. Tada je

$$\underline{\underline{\text{t} \;\ldots\quad y - y_0 = y_0^{'}(x - x_0)}}\;, \tag{38}$$

jednadžba tangente na krivulju $\mathcal{C}$ ... $y = y(x)$ u diralištu $\mathrm{T}_0 = (x_0, y_0)$, gdje je:

$$y_0 = y(x_0), \qquad y_0^{'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Uspoređivanjem jednadžbi (37) i (38) proizlazi: $y_0^{'} = \dfrac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$, odnosno: $y'(x_0) = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$.

Primijetimo da je: $\boxed{y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}}$ tj. $\boxed{y'(x) = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}}$,

čime je dana veza između derivacije funkcije zadane eksplicitnom jednadžbom $y = y(x)$ i tzv. "parametarskih" derivacija te funkcije zadane parametarskim jednadžbama $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Podsjetimo se, iz vektorske jednadžbe $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ regularne krivulje $\mathcal{C}$ u ravnini $\mathbb{R}^2$ ($\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in \mathrm{I}$) proizlaze parametarske jednadžbe te krivulje: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

✎ Neka je krivulja $\mathcal{C}$ zadana implicitnom jednadžbom $\mathrm{F}(x, y) = 0$.

Pretpostavimo da je y funkcije po varijabli x, tj. $y = y(x)$. Tada implicitnu jednadžbu $\mathrm{F}(x, y) = 0$ možemo pisati u obliku: $\mathrm{F}(x, y(x)) = 0$. Deriviranjem te jednadžbe po varijabli x dobiva se jednadžba: $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, iz koje proizlazi identitet: $\boxed{y' = -\dfrac{\mathrm{F}_x}{\mathrm{F}_y}}$ uz uvjet da je $\mathrm{F}_y \neq 0$. Pritom smo koristili poznate oznake: $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{F}_x = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$, $\mathrm{F}_y = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$.

Iz navedenog proizlazi: $y_0^{'} = -\left(\dfrac{\mathrm{F}_x}{\mathrm{F}_y}\right)_{\mathrm{T}_0} = -\dfrac{(\mathrm{F}_x)_{\mathrm{T}_0}}{(\mathrm{F}_y)_{\mathrm{T}_0}}$, ako je $(\mathrm{F}_y)_{\mathrm{T}_0} \neq 0$

na temelju čega zaključujemo da je jednadžba tangente u diralištu $\mathrm{T}_0 = (x_0, y_0)$ dana sa:

$$\text{t} \;\ldots\quad y - y_0 = -\frac{(\mathrm{F}_x)_{\mathrm{T}_0}}{(\mathrm{F}_y)_{\mathrm{T}_0}}(x - x_0)$$

ili

$$\underline{\underline{\text{t} \;\ldots\quad (\mathrm{F}_x)_{\mathrm{T}_0}(x - x_0) + (\mathrm{F}_y)_{\mathrm{T}_0}(y - y_0) = 0}}\;. \tag{39}$$

Pritom se podrazumijeva da je: $(F_x)_{T_0} = F_x(x_0, y_0)$, $(F_y)_{T_0} = F_y(x_0, y_0)$, gdje je $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Koristeći činjenicu da normala u diralištu je pravac okomit na tangentu koji prolazi tim diralištem, dobivamo da je jednadžba normale u diralištu $T_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ dana sa:

- n ... $y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0)$ ako je $\mathcal{C}$ ... $y = y(x)$,

- n ... $(F_y)_{T_0}(x - x_0) - (F_x)_{T_0}(y - y_0) = 0$ ili

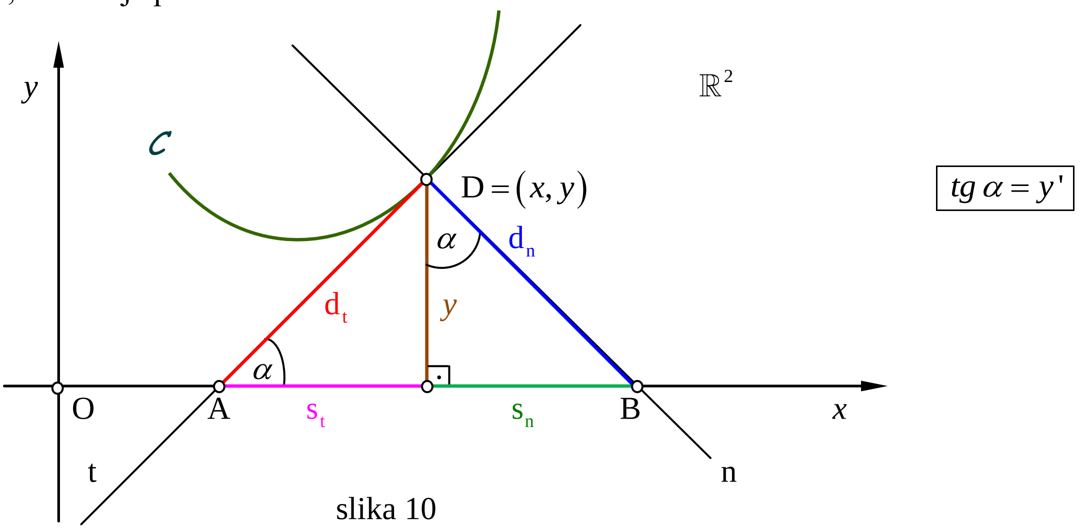
  n ... $\frac{x - x_0}{(F_x)_{T_0}} = \frac{y - y_0}{(F_y)_{T_0}}$ ako je $\mathcal{C}$ ... $F(x, y) = 0$,

- n ... $y - y_0 = -\frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0}(x - x_0)$ ili

  n ... $\frac{x - x_0}{\dot{y}_0} = -\frac{y - y_0}{\dot{x}_0}$ ako je $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$, $t \in I$.

Osim tangente i normale definirajmo još i subtangentu, subnormalu, duljinu tangente i duljinu normale (koje imaju važnu ulogu u definiranju svojstva pojedinih krivulja) - vidi sliku 10.

- Neka je krivulja zadana eksplicitnom jednadžbom $\mathcal{C}$ ... $y = y(x)$ i neka je $D = (x, y) \in \mathcal{C}$ dirališt e, kao što je prikazano na slici 10.



slika 10

Definiramo:

duljina tangente (oznaka: d_t) je udaljenost od dirališta do sjecišta tangente sa *x* osi,
duljina normale (oznaka: d_n) je udaljenost od dirališta do sjecišta normale sa *x* osi,
subtangenta (oznaka: s_t) je ortogonalna projekcija duljine tangente na *x* os,
subnormala (oznaka: s_n) je ortogonalna projekcija duljine normale na *x* os.

Uočimo da je α kut između tangente i *x*-osi te da je po definiciji $tg\,\alpha = y' = \dfrac{dy}{dx}$, ako je krivulja zadana eksplicitnom jednadžbom $y = y(x)$. Primjenom definicije funkcije tangensa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu dobivamo:

$$tg\,\alpha = \frac{y}{\mathrm{s_t}},\quad tg\,\alpha = y' \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{s_t} = \frac{y}{y'}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\mathrm{s_n}}{\mathrm{y}},\quad tg\,\alpha = y' \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{s_n} = yy'}$$

te koristeći Pitagorin teorem proizlazi:

$$\mathrm{d_t} = \sqrt{\mathrm{s_t^2} + y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{d_t} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\mathrm{d_n} = \sqrt{\mathrm{s_n^2} + y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{d_n} = y\sqrt{1 + y'^2}}$$

Napomenimo da navedene formule vrijede i u slučaju kada je krivulja zadana implicitnom jednadžbom, ali isto tako i vektorskom jednadžbom. Podsjetimo se,

- ako je $\mathcal{C}$ ... $\mathrm{F}(x, y) = 0$ (krivulja zadana implicitnom jednadžbom), onda y' možemo izračunati po formuli: $y' = -\dfrac{\mathrm{F}_x}{\mathrm{F}_y}$, gdje je: $\mathrm{F}_x = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$, $\mathrm{F}_y = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \neq 0$;
- ako je $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} = \big(x(t), y(t)\big)$, $\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in \mathrm{I}$ (krivulja zadana vektorskom jednadžbom), onda y' možemo izračunati po formuli:
$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \text{gdje je:} \quad \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0.$$

Tangenta regularne krivulje u $\mathbb{R}^3$

Pogledajmo sada kako glasi jednadžba tangente regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$ s obzirom na način zadavanja krivulje.

Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$ i neka je $\vec{x} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ zadane vektorskom jednadžbom:

$$\boxed{\mathcal{C} \;\ldots\quad \vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)} \quad \text{za svaki } t \in \mathrm{I}.$$

Pritom su skalarne funkcije $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ koordinatne funkcije vektorske funkcije $\vec{x}(t)$.
Iz pretpostavke da je $\vec{x} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija proizlazi: $\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in \mathrm{I}$ ili ekvivalentno: $\big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big) \neq (0,0,0)$.

Vektorska funkcija $$\boxed{\vec{\mathrm{T}}(t)=\frac{\vec{x}'(t)}{\left|\vec{x}'(t)\right|}=\frac{\dot{x}(t)\,\vec{i}+\dot{y}(t)\,\vec{j}+\dot{z}(t)\,\vec{k}}{\sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2+\left(\dot{y}(t)\right)^2+\left(\dot{z}(t)\right)^2}}}$$

je <u>jedinični vektor tangente</u> na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$.

Analogno, kao i za krivulje u ravnini dobivamo da se vektorska jednadžba tangente

$$\mathrm{t}\ \ldots\quad \vec{r}(u)=X(u)\,\vec{i}+Y(u)\,\vec{j}+Z(u)\,\vec{k},\quad u\in \mathrm{I}_u\subseteq\mathbb{R}$$

(vidi str. 32-33) na neku prostornu krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu $\mathrm{T}_0=\left(x(t_0),y(t_0),z(t_0)\right)\in\mathcal{C}$ može pisati u obliku:

$$\underline{\underline{\mathrm{t}\ \ldots\quad \vec{r}(u)=\vec{x}(t_0)+\lambda(u)\cdot\vec{x}'(t_0)}}\ ,$$

odakle proizlazi da su parametarske jednadžbe te tangente dane sa:

$$\left.\begin{aligned} X(u)&=x(t_0)+\lambda(u)\cdot\dot{x}(t_0)\\ Y(u)&=y(t_0)+\lambda(u)\cdot\dot{y}(t_0)\\ Z(u)&=z(t_0)+\lambda(u)\cdot\dot{z}(t_0)\ . \end{aligned}\right\}$$

Eliminacijom $\lambda(u)$ iz danih parametarskih jednadžbi, dobivamo da je jednadžba tangente na krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu $\mathrm{T}_0=\left(x(t_0),y(t_0),z(t_0)\right)\in\mathcal{C}$ dana sa:

$$\mathrm{t}\ \ldots\quad \frac{x-x(t_0)}{\dot{x}(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{\dot{y}(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{\dot{z}(t_0)},$$

ili: $$\boxed{\mathrm{t}\ \ldots\quad \frac{x-x_0}{\dot{x}_0}=\frac{y-y_0}{\dot{y}_0}=\frac{z-z_0}{\dot{z}_0}}$$ (usporedite s jednadžbom (36)).

- Ako je krivulja zadana implicitnom jednadžbom, onda se ona prikazuje kao presjek dviju ploha, stoga je implicitna jednadžba prostorne krivulje dana sljedećim sustavom jednadžbi:

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x,y,z)&=0\\ \mathrm{G}(x,y,z)&=0\,.\end{aligned}$$

Pretpostavimo li da su x i y funkcije po varijabli z, odnosno da je $x=x(z)$ i $y=y(z)$, tada se dani sustav jednadžbi može pisati u obliku sljedećeg sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left(x(z),y(z),z\right)&=0\\ \mathrm{G}\left(x(z),y(z),z\right)&=0\,,\end{aligned}$$

iz kojeg deriviranjem po varijabli z proizlazi sustav:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dz}}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dz}}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dz}}+\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dz}}+\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}=0\,.\end{aligned}\right\}\quad(*)$$

Uvođenjem oznaka $\mathrm{F}_x:=\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$, $\mathrm{F}_y:=\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$, $\mathrm{F}_z:=\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$, $\mathrm{G}_x:=\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}$, $\mathrm{G}_y:=\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}$, $\mathrm{G}_z:=\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}$

dobivamo da se sustav $(*)$ može pisati u obliku sustava:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{F}_x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dz}}+\mathrm{F}_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dz}}=-\mathrm{F}_z\\ \mathrm{G}_x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dz}}+\mathrm{G}_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dz}}=-\mathrm{G}_z\,,\end{aligned}\right\}\quad(**)$$

u kojemu su nepoznanice $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dz}}$ i $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dz}}$.

Ako je $\begin{vmatrix}\mathrm{F}_x & \mathrm{F}_y\\ \mathrm{G}_x & \mathrm{G}_y\end{vmatrix}\neq 0$, onda sustav $(**)$ ima jedinstveno rješenje, stoga primjenom Cramerovog pravila dobivamo da je rješenje sustava $(**)$ dano sa:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dz}}=\frac{\begin{vmatrix}-\mathrm{F}_z & \mathrm{F}_y\\ -\mathrm{G}_z & \mathrm{G}_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_x & \mathrm{F}_y\\ \mathrm{G}_x & \mathrm{G}_y\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_y & \mathrm{F}_z\\ \mathrm{G}_y & \mathrm{G}_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_x & \mathrm{F}_y\\ \mathrm{G}_x & \mathrm{G}_y\end{vmatrix}},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dz}}=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_x & -\mathrm{F}_z\\ \mathrm{G}_x & -\mathrm{G}_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_x & \mathrm{F}_y\\ \mathrm{G}_x & \mathrm{G}_y\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_z & \mathrm{F}_x\\ \mathrm{G}_z & \mathrm{G}_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_x & \mathrm{F}_y\\ \mathrm{G}_x & \mathrm{G}_y\end{vmatrix}}.$$

Primijetimo da je: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_y & \mathrm{F}_z\\ \mathrm{G}_y & \mathrm{G}_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_z & \mathrm{F}_x\\ \mathrm{G}_z & \mathrm{G}_x\end{vmatrix}}$ ako je $\begin{vmatrix}\mathrm{F}_z & \mathrm{F}_x\\ \mathrm{G}_z & \mathrm{G}_x\end{vmatrix}\neq 0$.

Time dobivamo da je: $\mathrm{d}x:\mathrm{d}y:\mathrm{dz}=\begin{vmatrix}\mathrm{F}_y & \mathrm{F}_z\\ \mathrm{G}_y & \mathrm{G}_z\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\mathrm{F}_z & \mathrm{F}_x\\ \mathrm{G}_z & \mathrm{G}_x\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\mathrm{F}_x & \mathrm{F}_y\\ \mathrm{G}_x & \mathrm{G}_y\end{vmatrix}$,

stoga se jednadžba tangente u diralištu $\mathrm{T}_0=\left(x_0,y_0,z_0\right)\in\mathcal{C}$ može pisati u obliku:

$$\mathrm{t}\ \ldots\quad \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_y & \mathrm{F}_z\\ \mathrm{G}_y & \mathrm{G}_z\end{vmatrix}_{\mathrm{T}_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_z & \mathrm{F}_x\\ \mathrm{G}_z & \mathrm{G}_x\end{vmatrix}_{\mathrm{T}_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\mathrm{F}_x & \mathrm{F}_y\\ \mathrm{G}_x & \mathrm{G}_y\end{vmatrix}_{\mathrm{T}_0}}$$

Napomena:

Uočimo da se jednadžba tangente (39) u diralištu $\mathrm{T}_0=\left(x_0,y_0\right)$ ravninske krivulje $\mathcal{C}$ ... $\mathrm{F}\left(x,y\right)=0$ (zadane implicitnom jednadžbom) može zapisati u obliku:

$$t \;\ldots\qquad \frac{x-x_0}{-\left(\mathrm{F}_y\right)_{\mathrm{T}_0}} = \frac{y-y_0}{\left(\mathrm{F}_x\right)_{\mathrm{T}_0}}.$$

Pritom iz $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\mathrm{F}_x}{\mathrm{F}_y}$ proizlazi: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{\mathrm{F}_y}{\mathrm{F}_x}$ odnosno: $\mathrm{d}x : \mathrm{d}y = -\mathrm{F}_y : \mathrm{F}_x$.

Tangenta regularne krivulje u $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

Neka je $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{\mathrm{n}}\right\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ i neka je $\vec{x} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ zadane vektorskom jednadžbom:

$$\mathcal{C} \;\ldots\qquad \vec{x}(t) = x_1(t)\cdot\vec{e}_1 + x_2(t)\cdot\vec{e}_2 + \cdots + x_{\mathrm{n}}(t)\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}} = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{\mathrm{n}}(t)\right)$$

pri čemu je $\vec{x}\,'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in \mathrm{I}$. Tada je vektorska funkcija

$$\vec{\mathrm{T}}(t) = \frac{\vec{x}\,'(t)}{\left|\vec{x}\,'(t)\right|} = \frac{\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{x}_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e}_{\mathrm{i}}}{\sqrt{\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(\dot{x}_{\mathrm{i}}(t)\right)^2}} = \frac{\dot{x}_1(t)\cdot\vec{e}_1 + \dot{x}_2(t)\cdot\vec{e}_2 + \cdots + \dot{x}_{\mathrm{n}}(t)\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}}}{\sqrt{\left(\dot{x}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_2(t)\right)^2 + \cdots + \left(\dot{x}_{\mathrm{n}}(t)\right)^2}}$$

jedinični vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu $\mathrm{T}_0 = \left(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_{\mathrm{n}}(t_0)\right) \in \mathcal{C}$. Uzimajući u obzir prethodno navedeno imamo da je vektorska jednadžba tangente na krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu T_0 dana jednadžbom (34), koja je u raspisanom obliku (s obzirom na pripadne koordinatne (skalarne) funkcije $x_{\mathrm{i}}(t)$, $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$ vektorske funkcije $\vec{x}(t) = \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_{\mathrm{i}}(t)\cdot\vec{e}_{\mathrm{i}}$) dana sa:

$$t \;\ldots\qquad \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} X_{\mathrm{i}}(u)\cdot\vec{e}_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(x_{\mathrm{i}}(t_0) + \lambda(u)\cdot\dot{x}_{\mathrm{i}}(t_0)\right)\cdot\vec{e}_{\mathrm{i}}, \qquad u \in \mathrm{I}_u,$$

odakle proizlaze da su parametarske jednadžbe te tangente dane sa:

$$\left.\begin{aligned} X_1(u) &= x_1(t_0) + \lambda(u)\cdot\dot{x}_1(t_0) \\ &\;\vdots \\ X_{\mathrm{n}}(u) &= x_{\mathrm{n}}(t_0) + \lambda(u)\cdot\dot{x}_{\mathrm{n}}(t_0). \end{aligned}\right\}$$

Eliminacijom $\lambda(u)$ iz danih parametarskih jednadžbi, dobivamo da je jednadžba tangente na krivulju $\mathcal{C}$ u diralištu $\mathrm{T}_0 = \left(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_{\mathrm{n}}(t_0)\right) \in \mathcal{C}$ dana sa:

$$t \;\ldots\qquad \frac{x_1 - x_1(t_0)}{\dot{x}_1(t_0)} = \frac{x_2 - x_2(t_0)}{\dot{x}_2(t_0)} = \cdots = \frac{x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{n}}(t_0)}{\dot{x}_{\mathrm{n}}(t_0)}.$$

Usporedite dobivenu jednadžbu s jednadžbom (36).