2.3 Duljina luka krivulje. Parametrizacija krivulje duljinom luka

Neka je $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ i neka je $\vec{x}: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ regularna parametrizacija krivulje u prostoru $\mathbb{R}^n$ (čime je $\vec{x}: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ glatko preslikavanje nekog nepraznog intervala $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ u prostor $\mathbb{R}^n$ takvo da je $\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in \mathrm{I}$).

❖ Primijetimo, uvjet $\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in \mathrm{I}$ ekvivalentan je uvjetu $\left|\vec{x}'(t)\right| \neq 0$ za svaki $t \in \mathrm{I}$.

Nadalje, neka je za svaki $t \in \mathrm{I}$ regularna krivulja $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^n$ zadana sa n skalarnih funkcija $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$ izrazom: $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot \vec{e_i} = x_1(t) \cdot \vec{e_1} + x_2(t) \cdot \vec{e_2} + \cdots + x_n(t) \cdot \vec{e_n}$.

Tada je:

$$\vec{x}'(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) \cdot \vec{e_i} = \dot{x}_1(t) \cdot \vec{e_1} + \dot{x}_2(t) \cdot \vec{e_2} + \cdots + \dot{x}_n(t) \cdot \vec{e_n},$$

$$\left|\vec{x}'(t)\right| = \sqrt{\vec{x}'(t) \cdot \vec{x}'(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x}_i(t)\right)^2} = \sqrt{\left(\dot{x}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_2(t)\right)^2 + \cdots + \left(\dot{x}_n(t)\right)^2}$$

pri čemu je vektorska funkcija $\vec{x}'(t)$ vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u nekoj njenoj proizvoljnoj točki $\mathrm{T}\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right) \in \mathcal{C}$, a skalarna funkcija $\left|\vec{x}'(t)\right|$ je duljina vektora tangene $\vec{x}'(t)$ u toj točki T. Podsjetimo se, vektorska funkcija

$$\vec{\mathrm{T}}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{\left|\vec{x}'(t)\right|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) \cdot \vec{e_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x}_i(t)\right)^2}} = \frac{\dot{x}_1(t) \cdot \vec{e_1} + \dot{x}_2(t) \cdot \vec{e_2} + \cdots + \dot{x}_n(t) \cdot \vec{e_n}}{\sqrt{\left(\dot{x}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_2(t)\right)^2 + \cdots + \left(\dot{x}_n(t)\right)^2}} \quad .$$

je jedinični vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u nekoj njenoj proizvoljnoj točki $\mathrm{T} = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right) \in \mathcal{C}$.

Pretpostavimo da je segment $\mathrm{I} = [a,b]$, $a < b$ domena regularne parametrizacije krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^n$, kojoj su $\mathrm{A} = \left(x_1(a), x_2(a), ..., x_n(a)\right)$ i $\mathrm{B} = \left(x_1(b), x_2(b), ..., x_n(b)\right)$ rubne točke (vidi sliku 11).

Drugim riječima, neka je $\vec{x}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $a < b$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ zadane vektorskom jednadžbom $\vec{x} = \vec{x}(t)$, gdje je

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot \vec{e_i} = x_1(t) \cdot \vec{e_1} + x_2(t) \cdot \vec{e_2} + \cdots + x_n(t) \cdot \vec{e_n} \qquad \text{za svaki } t \in [a,b].$$

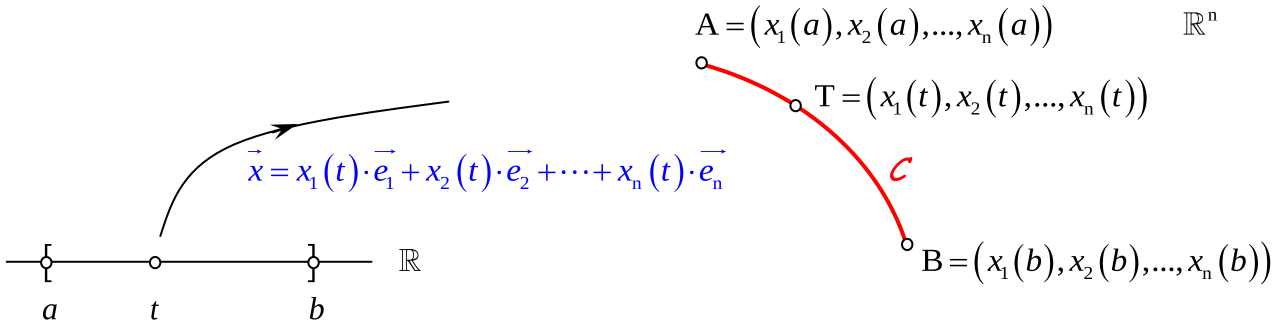
Definicija 2.3.1

Ako je $\vec{x}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$, onda duljinu luka regularne krivulje $\mathcal{C}$ označavamo sa s i računamo po formuli:

$$s=\int_a^b\left|\vec{x}\,'(t)\right|\mathrm{d}t \tag{40}$$

ili u raspisanom obliku:

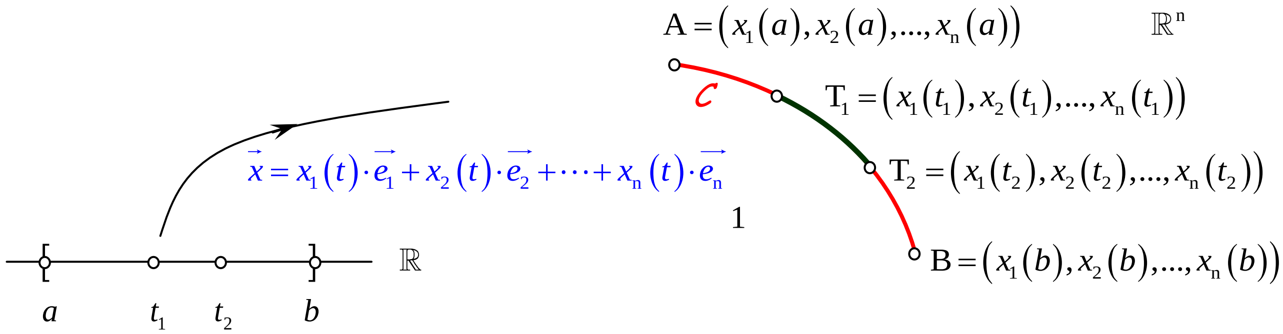
$$s=\int_a^b\sqrt{\left(\dot{x}_1(t)\right)^2+\left(\dot{x}_2(t)\right)^2+\cdots+\left(\dot{x}_n(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{41}$$



slika 11

Komentar 2.3.2

Neka su $t_1,t_2\in\mathrm{I}=[a,b]$, $a<b$. Tada na krivulji $\mathcal{C}$ imamo točke $T_1=\left(x_1(t_1),x_2(t_1),\ldots,x_n(t_1)\right)$ i $T_2=\left(x_1(t_2),x_2(t_2),\ldots,x_n(t_2)\right)$ (vidi sliku 12).



slika 12

Primjenom definicije 2.3.1 se duljina (dijela) luka krivulje $\mathcal{C}$ od točke T_1 do točke T_2 računa po formuli:

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{x}\,'(t)\right|\mathrm{d}t\,.$$

Definicija 2.3.3

Ako je $\vec{x}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ i $t_0\in[a,b]$ takav da je $T_0=\left(x_1(t_0),x_2(t_0),\ldots,x_n(t_0)\right)$ neka fiksna točka na krivulji $\mathcal{C}$, onda se za svaki $t_0\le t\le b$ duljina luka krivulje $\mathcal{C}$ od točke $T_0\in\mathcal{C}$ do proizvoljne točke $T=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\right)\in\mathcal{C}$ računa po formuli:

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\vec{x}\,'(u)\right|\mathrm{d}u\,. \tag{42}$$

Izrazom (42) dana je veza između duljine luka s i parametra t, kojim je parametrizirana regularna krivulja $\mathcal{C}$. Uočimo da je izrazom (42) duljina luka s izražena kao skalarna funkcija po varijabli t, tj. imamo: $s = s(t)$.

✐ Nameće se sljedeće pitanje:

ako regularnu parametrizaciju $\vec{x}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ krivulje $\mathcal{C}$ reparametriziramo, da li će duljina luka reparametrizirane krivulje biti jednaka duljini luka polazne krivulje?

Odgovor na ovo pitanje daje nam sljedeća propozicija, koja nam govori da je duljina luka reparametrizirane regularne krivulje jednaka duljini luka polazne (tj. zadane) krivulje.
Naime, reparametrizacijom regularne krivulje ne mijenja se njena duljina luka.

Propozicija 2.3.4

Neka je zadana regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^n$ sa $\vec{x}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$. Ako krivulju $\mathcal{C}$ reparametriziramo preslikavanjem $f:[c,d]\to[a,b]$, onda je duljina luka regularne reparametrizirane krivulje dane sa $\vec{y}:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ jednaka duljini luka krivulje $\mathcal{C}$.

Dokaz:

Treba dokazati da vrijedi: $\displaystyle\int_c^d \left|\vec{y}\,'(p)\right| \mathrm{d}p = \int_a^b \left|\vec{x}\,'(t)\right| \mathrm{d}t$.

Primjenom definicije 2.3.1 imamo da je $s = \displaystyle\int_a^b \left|\vec{x}\,'(t)\right| \mathrm{d}t$ duljina luka regularne krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^n$.

Teoremom 2.1.10 pokazali smo da je $\vec{y}:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ također regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^n$, pri čemu je: $\vec{y}(p) = (\vec{x}\circ f)(p) = \vec{x}(f(p))$ za svaki $p\in[c,d]$.

Time je izrazom $\displaystyle\int_c^d \left|\vec{y}\,'(p)\right| \mathrm{d}p$ dana duljina luka regularne reparametrizirane krivulje $\mathcal{C}$.

Iz $\vec{y}(p) = \vec{x}(f(p))$ proizlazi: $\vec{y}\,'(p) = \vec{x}\,'(f(p))\cdot f\,'(p)$,

stoga je:

$$\int_c^d \left|\vec{y}\,'(p)\right| \mathrm{d}p = \int_c^d \left|\vec{x}\,'(f(p))\cdot f\,'(p)\right| \mathrm{d}p = \int_c^d \left|\vec{x}\,'(f(p))\right|\cdot\left|f\,'(p)\right| \mathrm{d}p. \tag{43}$$

Primijetimo da vrijedi:

(i) $\left|f\,'(p)\right| = \pm f\,'(p)$, jer je $f(p)$ (a time i $f\,'(p)$) skalarna funkcija po varijabli p,

(ii) iz $f(p) = t$ proizlazi: $f\,'(p)\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}t$,

(iii) ako je $f\,'(p) > 0$ (funkcija f raste), onda je: $f(c) = a$, $f(d) = b$

(iv) ako je $f\,'(p) < 0$ (funkcija f pada), onda je: $f(c) = b$, $f(d) = a$.

Koristeći definiciju zamjene varijabli ("supstitucije") u određenom integralu,

po kojoj za neprekidnu funkciju $\varphi(x)$, $x\in[a,b]$ i neprekidne funkcije $x=\psi(u)$ i $\psi'(u)$, $u\in[\alpha,\beta]$, gdje je $a=\psi(\alpha)$, $b=\psi(\beta)$, pri čemu je $\varphi(\psi(u))$ definirana i neprekidna za svaki $u\in[\alpha,\beta]$ vrijedi:

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta \varphi(\psi(u))\cdot\psi'(u)\,\mathrm{d}u},$$

proizlazi:

(1) za $f'(p)>0$ funkcija $f:[c,d]\to[a,b]$ raste, stoga je: $f(c)=a$, $f(d)=b$ pa je:

$$\int_c^d \left|\vec{x}'(f(p))\right|\cdot|f'(p)|\,\mathrm{d}p=\int_c^d \left|\vec{x}'(f(p))\right|\cdot f'(p)\,\mathrm{d}p=\int_a^b \left|\vec{x}'(t)\right|\mathrm{d}t$$

(2) za $f'(p)<0$ funkcija $f:[c,d]\to[a,b]$ pada, stoga je: $f(c)=b$, $f(d)=a$ pa je:

$$\int_c^d \left|\vec{x}'(f(p))\right|\cdot|f'(p)|\,\mathrm{d}p=-\int_c^d \left|\vec{x}'(f(p))\right|\cdot f'(p)\,\mathrm{d}p=\int_d^c \left|\vec{x}'(f(p))\right|\cdot f'(p)\,\mathrm{d}p=\int_a^b \left|\vec{x}'(t)\right|\mathrm{d}t$$

Pritom se koristilo da je $f(p)=t$ za svaki $p\in[c,d]$ i $f'(p)\,\mathrm{d}p=\mathrm{d}t$.

U oba slučaja dobili smo da je $\displaystyle\int_c^d \left|\vec{x}'(f(p))\right|\cdot|f'(p)|\,\mathrm{d}p=\int_a^b \left|\vec{x}'(t)\right|\mathrm{d}t$,

što uvrštavanjem u identitet (43) povlači da je: $\displaystyle\int_c^d \left|\vec{y}'(p)\right|\mathrm{d}p=\int_a^b \left|\vec{x}'(t)\right|\mathrm{d}t$.

Time je propozicija dokazana.

Definicija 2.3.5

Ako je $\left|\vec{x}'(t)\right|=1$ za svaki $t\in[a,b]$, onda kažemo da je krivulja $\mathcal{C}$ parametrizirana po (svojoj) duljini luka s ili po prirodnom parametru s.

Drugim rječima za krivulju $\mathcal{C}$ ... $\vec{y}=\vec{y}(s)$ vrijedi: $\left|\vec{y}'(s)\right|=1$.

✎ Ako je krivulja $\mathcal{C}$ zadana sa $\vec{x}=\vec{x}(s)$, gdje je s duljina luka krivulje $\mathcal{C}$, onda je $\left|\vec{x}'(s)\right|=1$. Time je vektorska funkcija

$$\boxed{\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{x}'(s)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\dot{x}_{\mathrm{i}}(s)\cdot\vec{e}_{\mathrm{i}}=\dot{x}_1(s)\cdot\vec{e}_1+\dot{x}_2(s)\cdot\vec{e}_2+\cdots+\dot{x}_{\mathrm{n}}(s)\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

jedinični vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$.

Obrazložimo navedenu tvrdnju.

Primjenom definicije 2.3.3 imamo da se za svaki $a \le t \le b$ duljina luka regularne krivulje $\mathcal{C}$ od fiksne točke $\mathrm{A} = \left(x_1(a), x_2(a), ..., x_n(a)\right)$ do proizvoljne točke $\mathrm{T} = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$ računa po formuli: $s(t) = \int_a^t \left|\vec{x}\,'(u)\right| \mathrm{d}u$ iz koje proizlazi:

$$\boxed{\mathrm{d}s(t) = \left|\vec{x}\,'(t)\right| \mathrm{d}t}, \tag{44}$$

odnosno

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \left|\vec{x}\,'(t)\right|} \tag{45}$$

ili $s'(t) = \left|\vec{x}\,'(t)\right|$.

Pretpostavimo da je parametar t vektorske jednadžbe regularne krivulje $\mathcal{C}$ jednak duljini luka s, tada iz identiteta (44) proizlazi: $\mathrm{d}s = \left|\vec{x}\,'(s)\right| \mathrm{d}s$ što povlači: $\left|\vec{x}\,'(s)\right| = 1$.

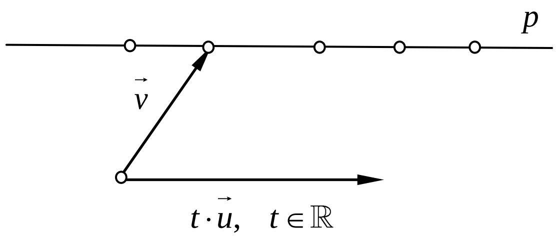
Jasno, u ovom slučaju imamo regularnu krivulju $\mathcal{C}$ … $\vec{x} = \vec{x}(s)$, kojoj je vektor tangente ujedno jedinični, tj. $\vec{\mathrm{T}}(s) = \vec{x}\,'(s)$.

Primjedba 2.3.6

$s = s(t)$ je skalarna funkcija po varijabli t, stoga se identitet (45) može kraće pisati u obliku: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\vec{x}\,'(t)\right|$, odakle proizlazi $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\left|\vec{x}\,'(t)\right|}$. U ovom slučaju je $\underline{t = t(s)}$ skalarna funkcija po varijabli s, koja je ujedno inverzna funkcija funkcije $s = s(t)$, stoga je: $t'(s) = \frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\left|\vec{x}\,'(t(s))\right|}$.

Primjer 2.3.7

Neka su $\vec{u} \ne \vec{0}$ i $\vec{v}$ fiksni konstantni vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada je preslikavanje $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zadano sa: $\underline{\vec{x}(t) = \vec{u} \cdot t + \vec{v}}$ regularna parametrizacija pravca u prostoru $\mathbb{R}^n$.



Pritom je $\underline{\vec{x}\,'(t) = \vec{u} \ne \vec{0}}$ za svaki $t \in \mathbb{R}$ (proizlazi iz pretpostavke $\vec{u} \ne \vec{0}$).

Time je konstantan vektor $\vec{u}$ vektor tangente te je konstantan vektor $\vec{\mathrm{T}} = \frac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}$ jedinični vektor tangente u bilo kojoj točki pravca.

Napomena:

Pravac možemo zadati i vektorskom jednadžbom $\vec{x}(t) = \mathrm{P} \cdot (1-t) + \mathrm{Q} \cdot t$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, gdje su P i Q dvije fiksne točke, čime se dobiva jednadžba pravca koji prolazi točkama P i Q.

U ovom slučaju je: $\vec{\mathrm{T}} = \left|\mathrm{Q} - \mathrm{P}\right|$ (konstantan vektor).

♦ Reparametrizirajmo sada pravac $\vec{x}(t)=\vec{u}\cdot t+\vec{v}$, $t\in\mathbb{R}$ po prirodnom parametru s.

Uzimajući u obzir da je $\left|\vec{x}\,'(t)\right|=\left|\vec{u}\right|$ za svaki $t\in\mathbb{R}$ te koristeći definiciju 2.3.3 dobivamo:

$$s(t)=\int_a^t\left|\vec{x}\,'(v)\right|\mathrm{d}v=\left|\vec{u}\right|\cdot(t-a)\quad \text{i specijalno za } a=0:\quad s(t)=\left|\vec{u}\right|\cdot t \;\Rightarrow\; t=\frac{s}{\left|\vec{u}\right|}.$$

Time je vektorska jednadžba pravca reparametriziranog po duljini luka (tj. prirodnom parametru) s dana sa: $\vec{x}(s)=\dfrac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}\cdot s+\vec{v}$ ili $\vec{x}(s)=\vec{\mathrm{T}}\cdot s+\vec{v}$, $s\in\left[0,+\infty\right\rangle$, gdje je $\vec{\mathrm{T}}=\dfrac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}$.

Primjer 2.3.8

Reparametrizirajte kružnicu polumjera $r>0$ (sa središtem u ishodištu) zadanu sa:

$$\vec{x}(t)=(r\cos t,r\sin t,0),\quad r>0,\quad t\in[0,2\pi]$$

po prirodnom parametru s.

Imamo: $\vec{x}\,'(t)=(-r\sin t,r\cos t,0)=r\cdot(-\sin t,\cos t,0)$, tj. $\left|\vec{x}\,'(t)\right|=r$ za svaki $t\in[0,2\pi]$.

Time je: $s(t)=\displaystyle\int_a^t\left|\vec{x}\,'(u)\right|\mathrm{d}u=\int_{a=0}^t r\,\mathrm{d}u=r\cdot t$, odakle proizlazi: $\underline{t=\dfrac{s}{r}}$,

stoga je $\vec{x}(s)=\left(r\cos\dfrac{s}{r},r\sin\dfrac{s}{r},0\right)$, $r>0$, $s\in[0,2r\pi]$ vektorska jednadžba kružnice reparametrizirane po duljini luka te je jedinični vektor tangente u bilo kojoj točki te kružnice dan sa:

$$\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{x}\,'(s)=\left(r\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(-\sin\frac{s}{r}\right),r\cdot\frac{1}{r}\cdot\cos\frac{s}{r},0\right)=\left(-\sin\frac{s}{r},\cos\frac{s}{r},0\right).$$

Dodatak:

Uzimajući u obzir komentar 2.3.2 za regularnu ravninsku krivulju $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}$, $\vec{x}\,'(t)\neq\vec{0}$ za svaki $t\in\mathrm{I}$, gdje je $\vec{x}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ imamo da se duljina luka krivulje $\mathcal{C}$ od točke T_1 do točke T_2 računa po formuli:

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2+\left(\dot{y}(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t,\qquad \text{gdje je}\quad t_1,t_2\in\mathrm{I}=[a,b],\ a<b.$$

Uzimajući u obzir vezu između derivacije funkcije zadane eksplicitnom jednadžbom $y=y(x)$ i tzv. "parametarskih" derivacija $\dot{x}(t)=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ i $\dot{y}(t)=\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$, gdje je: $\boxed{y'(x)=\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}}$ dobivamo:

$s=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2}\,\underbrace{\dot{x}(t)\mathrm{d}t}_{=\mathrm{d}x}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$. Time je formula za izračunavanje duljine luka krivulje $\mathcal{C}$ ... $y=y(x)$ (zadane eksplicitnom jednadžbom) dana sa: $\boxed{s=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x}$.