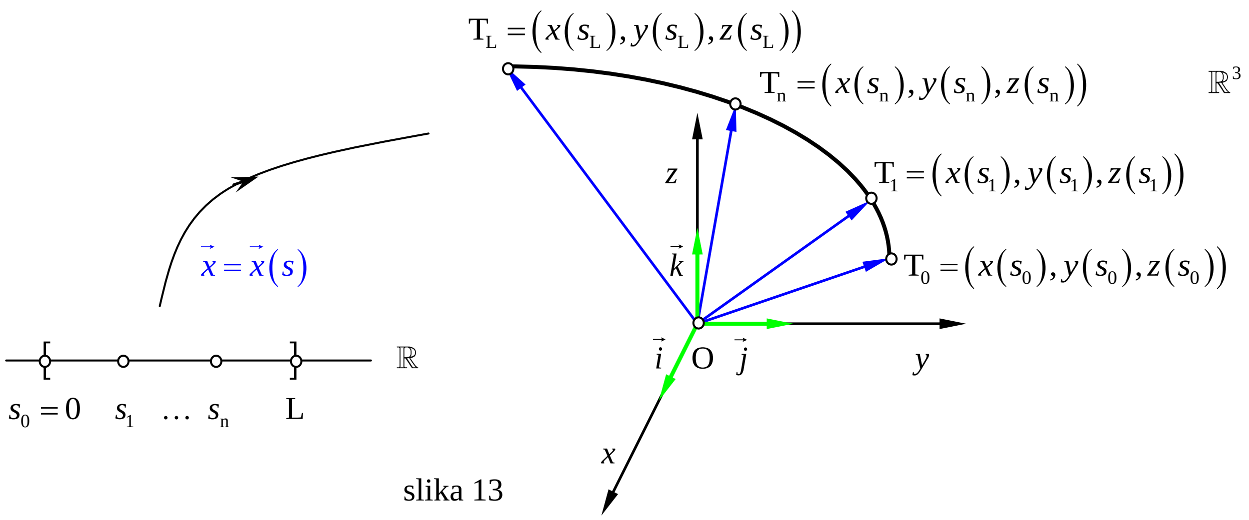
2.4 Trobrid pratioc prostorne krivulje

U ovom odjeljku razmatrati će se regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirane duljinom luka $s \geq 0$, tj. zadane vektorskom jednadžbom $\mathcal{C} \ldots \vec{x} = \vec{x}(s),\ s \in [0, \mathrm{L}] \subset \mathbb{R}$.

Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$ i neka je $\vec{x} : [0, \mathrm{L}] \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C} \ldots\ \vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k} = (x(s), y(s), z(s)),\ \ \vec{x}\,'(s) \neq 0,\ \ s \in [0, \mathrm{L}] \subset \mathbb{R}$.

Pritom za $s_0 = 0$ na krivulji $\mathcal{C}$ dobivamo početnu točku $\mathrm{T}_0 = (x(s_0), y(s_0), z(s_0))$ u kojoj je duljina luka krivulje jednaka nuli. Analogno u točki $\mathrm{T}_1 = (x(s_1), y(s_1), z(s_1))$ je duljina luka krivulje jednaka s_1. Drugim riječima, duljina luka krivulje $\mathcal{C}$ od početne točke T_0 do točke T_1 jednaka je s_1 (vidi sliku 13).



slika 13

U nastavku će se u bilo kojoj točki $\mathrm{T} = (x(s), y(s), z(s))$ krivulje $\mathcal{C}$ konstruirati trobrid pratioc, koji je sastavljen od tri jedinična vektora: jediničnog vektora tangente $\vec{\mathrm{T}}(s)$, jediničnog vektora glavne normale $\vec{\mathrm{N}}(s)$ i jediničnog vektora binormale $\vec{\mathrm{B}}(s)$. Prije toga dokažimo sljedeću lemu.

Lema 2.4.1

Neka su $\vec{u}, \vec{v} : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilne vektorske funkcije skalarnog argumenta takve da je:

$$\underline{\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = const.} \quad \text{za svaki } t \in \langle a, b \rangle .$$

Tada je $\boxed{\vec{u}\,'(t) \cdot \vec{v}(t) = -\vec{u}(t) \cdot \vec{v}\,'(t)}$.

Specijalno: $|\vec{u}(t)| = const.$ ako i samo ako je: $\vec{u}(t) \cdot \vec{u}\,'(t) = 0$ za svaki $t \in \langle a, b \rangle$.

Dokaz:

Iz pretpostavke da je $\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)=const.$ za svaki $t\in\langle a,b\rangle$ proizlazi da je derivacija skalarnog produkta tih dviju vektorskih funkcije jednaka nuli, odnosno: $\left(\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right)'=0$,

čime je: $\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}\,'(t)=0$

odnosno $\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)=-\vec{u}(t)\cdot\vec{v}\,'(t)$.

Pritom se koristila definicija derivacije skalarnog produkta dviju vektorskih funkcija.

Pretpostavimo sada da je $\left|\vec{u}(t)\right|=const.$ Tada je: $\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)=const.$,

jer je prema definiciji $\left|\vec{u}(t)\right|=\sqrt{\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)}$.

Nadalje, ako je: $\vec{u}(t)\cdot\vec{u}(t)=const.$, onda je prema tvrdnji leme: $\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{u}(t)=-\vec{u}(t)\cdot\vec{u}\,'(t)$ ili $2\cdot\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{u}(t)=0$, čime se dobiva $\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{u}(t)=0$. Time je lema dokazana.

Primjedba 2.4.2

Podsjetimo se, ako je krivulja $\mathcal{C}$ zadana sa $\vec{x}=\vec{x}(s)$, gdje je s duljina luka krivulje $\mathcal{C}$, onda je $\left|\vec{x}\,'(s)\right|=1$, čime je $\boxed{\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{x}\,'(s)}$ jedinični vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}$ … $\vec{x}=\vec{x}(s)$.
Primjenom leme 2.4.1 imamo da iz $\left|\vec{\mathrm{T}}(s)\right|=1$ proizlazi: $\vec{\mathrm{T}}(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}\,'(s)=0$, tj. $\vec{\mathrm{T}}(s)\perp\vec{\mathrm{T}}\,'(s)$.
Dobili smo da je derivacija jediničnog vektora tangente ortogonalna na jedinični vektor tangente u bilo kojoj točki krivulje $\mathcal{C}$. Primijetimo da vektor $\vec{\mathrm{T}}\,'(s)$ ne mora biti jedinični vektor. Drugim riječima, općenito je: $\left|\vec{\mathrm{T}}\,'(s)\right|\neq 1$.
Pretpostavimo da je $\vec{\mathrm{T}}\,'(s)\neq\vec{0}$, što je ekvivalentno uvjetu $\left|\vec{\mathrm{T}}\,'(s)\right|\neq 0$ ili $\left|\vec{x}\,''(s)\right|\neq 0$.

Definicija 2.4.3

Vektorsku funkciju $\boxed{\vec{\mathrm{N}}(s)=\dfrac{\vec{\mathrm{T}}\,'(s)}{\left|\vec{\mathrm{T}}\,'(s)\right|}}$ zovemo <u>jediničnim vektorom glavne normale</u> na krivulju $\mathcal{C}$ … $\vec{x}=\vec{x}(s)$. Pritom je: $\vec{\mathrm{N}}(s)=\dfrac{\vec{\mathrm{T}}\,'(s)}{\left|\vec{\mathrm{T}}\,'(s)\right|}=\dfrac{\vec{x}\,''(s)}{\left|\vec{x}\,''(s)\right|}$, $\left|\vec{\mathrm{N}}(s)\right|=1$, $\left|\vec{\mathrm{T}}\,'(s)\right|=\left|\vec{x}\,''(s)\right|\neq 0$.

Napomenimo da u bilo kojoj točki regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$ ne postoji jedinstveni vektor (normale) ortogonalan na tangentu, tj. ortogonalan na jedinični vektor tangente. Iz tog se razloga definira vektor glavne normale, tj. jedinični vektor glavne normale (kao što je dano u definiciji 2.4.3), koji je kolinearan sa $\vec{\mathrm{T}}\,'(s)$.

Iz definicije 2.4.3 proizlazi da je jedinični vektor glavne normale jednak jediničnom vektoru vektora $\vec{\mathrm{T}}'(s)$ ili ekvivalentno jediničnom vektoru vektora $\vec{x}''(s)$.

Nadalje, $\vec{\mathrm{T}}'(s) \parallel \vec{\mathrm{N}}(s)$ i $\vec{\mathrm{T}}'(s) \perp \vec{\mathrm{T}}(s)$ povlači: $\vec{\mathrm{N}}(s) \perp \vec{\mathrm{T}}(s)$.

Definicija 2.4.4

Vektorsku funkciju $\vec{\mathrm{B}}(s)$, definiranu sa: $\boxed{\vec{\mathrm{B}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) \times \vec{\mathrm{N}}(s)}$

zovemo <u>jediničnim vektorom binormale</u> na krivulju $\mathcal{C} \ \ldots \ \vec{x} = \vec{x}(s)$.

Pritom je: $$\vec{\mathrm{B}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) \times \vec{\mathrm{N}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) \times \frac{\vec{\mathrm{T}}'(s)}{\left|\vec{\mathrm{T}}'(s)\right|} = \vec{x}'(s) \times \frac{\vec{x}''(s)}{\left|\vec{x}''(s)\right|} = \frac{1}{\left|\vec{x}''(s)\right|} \cdot \left(\vec{x}'(s) \times \vec{x}''(s)\right)$$

odnosno: $$\boxed{\vec{\mathrm{B}}(s) = \frac{\vec{x}'(s) \times \vec{x}''(s)}{\left|\vec{x}''(s)\right|}}, \qquad \left|\vec{x}''(s)\right| \neq 0.$$

Primjedba 2.4.5

Uvjerimo se da je $\vec{\mathrm{B}}(s)$ definiran u 2.4.4 jedinični vektor, tj. da je $\left|\vec{\mathrm{B}}(s)\right| = 1$.

✐ ***<u>I. način dokaza</u>***: primjenom identiteta (14) str. 10 imamo da je

$$\left|\vec{\mathrm{B}}(s)\right|^2 = \left|\vec{\mathrm{T}}(s) \times \vec{\mathrm{N}}(s)\right|^2 = \underbrace{\left|\vec{\mathrm{T}}(s)\right|^2}_{=1} \cdot \underbrace{\left|\vec{\mathrm{N}}(s)\right|^2}_{=1} - \underbrace{\left(\vec{\mathrm{T}}(s) \cdot \vec{\mathrm{N}}(s)\right)^2}_{=0,\ \text{jer je } \vec{\mathrm{T}}(s) \perp \vec{\mathrm{N}}(s)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\vec{\mathrm{B}}(s)\right| = 1.$$

✐ ***<u>II. način dokaza</u>***: uočimo: $\left|\vec{\mathrm{B}}(s)\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{x}'(s) \times \vec{x}''(s)\right| = \left|\vec{x}''(s)\right|$.

Koristeći činjenicu da je $\left|\vec{x}'(s)\right| = 1$ te primjenom leme 2.4.1 imamo da je $\vec{x}'(s) \perp \vec{x}''(s)$, što povlači: $\left|\vec{x}'(s) \times \vec{x}''(s)\right| = \left|\vec{x}'(s)\right| \cdot \left|\vec{x}''(s)\right| \cdot \sin\varphi = \left|\vec{x}''(s)\right|$, gdje je $\varphi = \measuredangle\left(\vec{x}'(s), \vec{x}''(s)\right) = 90^0$.

Dobivamo da je: $\vec{\mathrm{B}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) \times \vec{\mathrm{N}}(s)$ jedinični vektor. S druge strane po definiciji vektorskog produkta imamo: $\vec{\mathrm{B}}(s) \perp \vec{\mathrm{T}}(s)$ i $\vec{\mathrm{B}}(s) \perp \vec{\mathrm{N}}(s)$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

Na osnovu rečenog zaključujemo da je $\left\{\vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{N}}(s), \vec{\mathrm{B}}(s)\right\}$ ortonormirani skup za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$ takav da je $\left|\vec{\mathrm{T}}'(s)\right| \neq 0$. Pritom je: $\vec{\mathrm{T}}(s) = \vec{\mathrm{N}}(s) \times \vec{\mathrm{B}}(s)$, $\vec{\mathrm{N}}(s) = \vec{\mathrm{B}}(s) \times \vec{\mathrm{T}}(s)$, $\vec{\mathrm{B}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) \times \vec{\mathrm{N}}(s)$.

Skup $\left\{\vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{N}}(s), \vec{\mathrm{B}}(s)\right\}$ naziva se **trobrid pratioc** krivulje $\mathcal{C}$ u točki $\mathrm{T} = \left(x(s), y(s), z(s)\right)$.

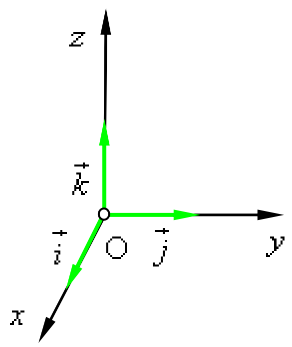
Primjer 2.4.6

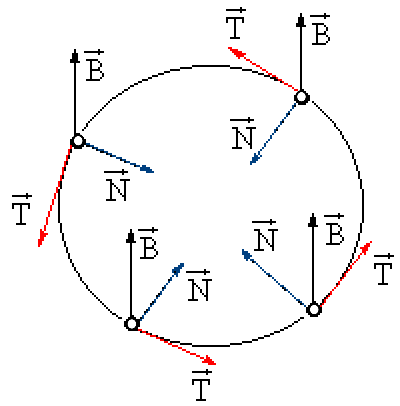
U primjeru 2.3.8 pokazali smo da je reparametrizacija kružnice polumjera $r > 0$ (sa središtem u ishodištu) po prirodnom parametru s dana sa: $\vec{x}(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0\right)$, $s \in [0, 2r\pi]$.

Pritom je: $\vec{x}'(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}, 0\right)$, $\vec{x}''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cdot\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\cdot\sin\frac{s}{r}, 0\right)$, gdje je $\left|\vec{x}''(s)\right| = \frac{1}{r}$.

$$\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{x}\,'(s)=\left(-\sin\frac{s}{r},\cos\frac{s}{r},0\right),\qquad \vec{\mathrm{N}}(s)=\frac{\vec{\mathrm{T}}\,'(s)}{\left|\vec{\mathrm{T}}\,'(s)\right|}=\frac{\vec{x}\,''(s)}{\left|\vec{x}\,''(s)\right|}=\left(-\cos\frac{s}{r},-\sin\frac{s}{r},0\right),$$

$$\vec{\mathrm{B}}(s)=\vec{\mathrm{T}}(s)\times\vec{\mathrm{N}}(s)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin\frac{s}{r} & \cos\frac{s}{r} & 0\\ -\cos\frac{s}{r} & -\sin\frac{s}{r} & 0\end{vmatrix}=\left(\sin^2\frac{s}{r}+\cos^2\frac{s}{r}\right)\vec{k}=\vec{k}=(0,0,1)$$





Komentar 2.4.7

S obzirom na razmatranja provedena u odjeljku 2.2 imamo da je $\underline{\underline{\mathrm{t}\ \ldots\ \vec{r}(u)=\vec{x}(s_0)+\lambda(u)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s_0)}}$, vektorska jednadžba tangente u diralištu $\mathrm{T}_0=\left(x(s_0),y(s_0),z(s_0)\right)\in\mathcal{C}$.

Analogno sa $\underline{\underline{\mathrm{n}\ \ldots\ \vec{r}(v)=\vec{x}(s_0)+\lambda(v)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s_0)}}$ je dana vektorska jednadžba glavne normale, a sa $\underline{\underline{\mathrm{b}\ \ldots\ \vec{r}(w)=\vec{x}(s_0)+\lambda(w)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s_0)}}$ vektorska jednadžba binormale u točki $\mathrm{T}_0=\left(x(s_0),y(s_0),z(s_0)\right)$.

- Uzimajući u obzir da je $\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{x}\,'(s)$ te primjenom definicija 2.4.3 i 2.4.4 zaključujemo:

$$\mathrm{t}\ \ldots\ \frac{x-x(s)}{\dot{x}(s)}=\frac{y-y(s)}{\dot{y}(s)}=\frac{z-z(s)}{\dot{z}(s)} \qquad \text{jednadžba tangente}$$

$$\mathrm{n}\ \ldots\ \frac{x-x(s)}{\ddot{x}(s)}=\frac{y-y(s)}{\ddot{y}(s)}=\frac{z-z(s)}{\ddot{z}(s)} \qquad \text{jednadžba glavne normale}$$

$$\mathrm{b}\ \ldots\ \frac{x-x(s)}{\begin{vmatrix}\dot{y}(s) & \dot{z}(s)\\ \ddot{y}(s) & \ddot{z}(s)\end{vmatrix}}=\frac{y-y(s)}{\begin{vmatrix}\dot{z}(s) & \dot{x}(s)\\ \ddot{z}(s) & \ddot{x}(s)\end{vmatrix}}=\frac{z-z(s)}{\begin{vmatrix}\dot{x}(s) & \dot{y}(s)\\ \ddot{x}(s) & \ddot{y}(s)\end{vmatrix}} \qquad \text{jednadžba binormale}$$

u bilo kojoj točki $\mathrm{T}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)$ regularne krivulje $\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}+z(s)\,\vec{k}$ za koju vrijedi $\left|\vec{x}\,''(s)\right|\neq 0$.

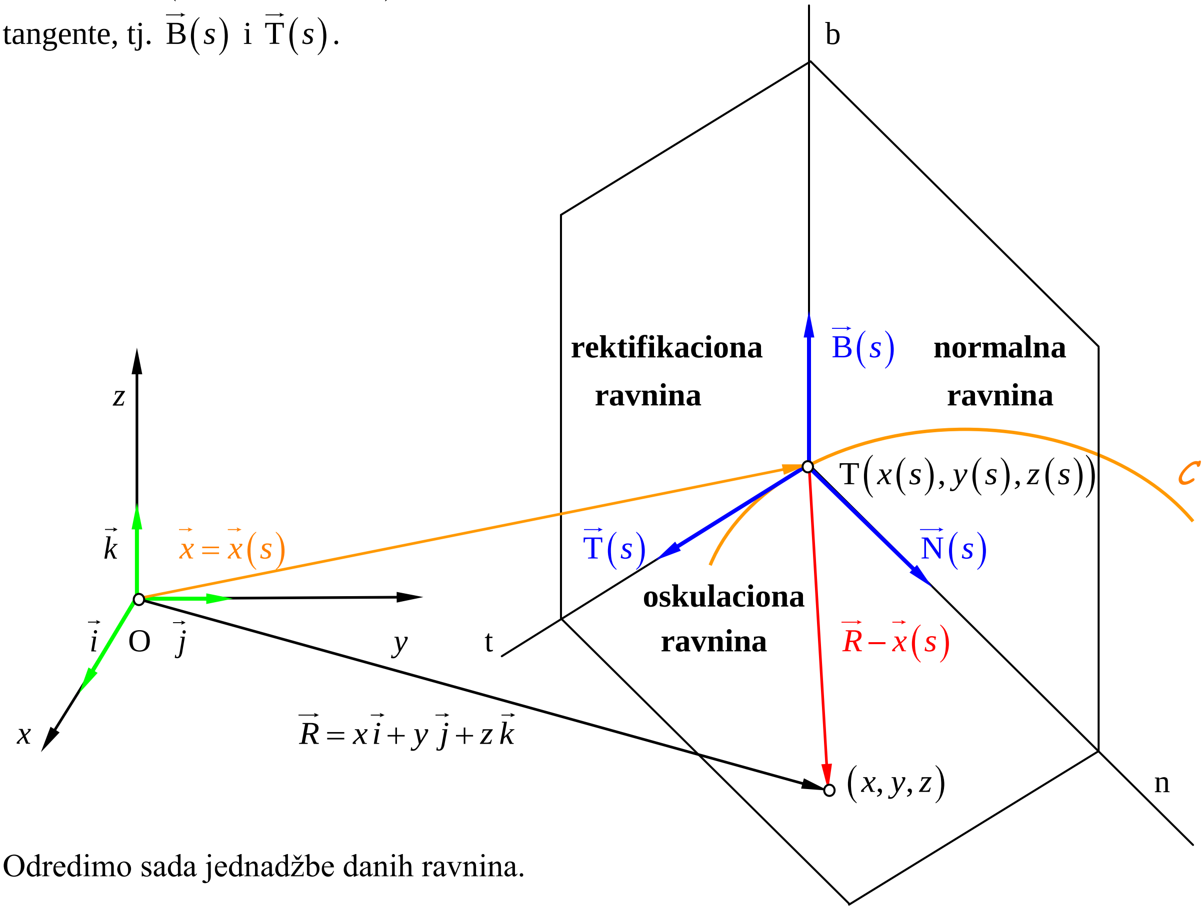
Vektorima trobrida pratioca određene su tri ravnine, koje ćemo nazvati oskulacionom, normalnom i rektifikacionom ravninom.

Definicija 2.4.8

Oskulaciona ravnina krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}+z(s)\,\vec{k}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)$ u točki $\mathrm{T}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)\in\mathcal{C}$ je ravnina koja je razapeta jediničnim vektorima tangente i glavne normale, tj. $\vec{\mathrm{T}}(s)$ i $\vec{\mathrm{N}}(s)$.

Normalna ravnina krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}+z(s)\,\vec{k}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)$ u točki $\mathrm{T}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)\in\mathcal{C}$ je ravnina koja je razapeta jediničnim vektorima glavne normale i binormale, tj. $\vec{\mathrm{N}}(s)$ i $\vec{\mathrm{B}}(s)$.

Rektifikaciona ravnina krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}+z(s)\,\vec{k}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)$ u točki $\mathrm{T}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)\in\mathcal{C}$ je ravnina koja je razapeta jediničnim vektorima binormale i tangente, tj. $\vec{\mathrm{B}}(s)$ i $\vec{\mathrm{T}}(s)$.



Odredimo sada jednadžbe danih ravnina.

Neka je $\vec{R}=x\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ radij-vektor bilo koje točke (x,y,z) u oskulacionoj ravnini krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$. Primijetimo da je jedinični vektor binormale $\vec{\mathrm{B}}(s)$ ortogonalan na oskulacionu ravninu, stoga je jednadžba oskulacione ravnine u točki $\mathrm{T}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)\in\mathcal{C}$ dana sa:

$$\boxed{\left(\vec{R}-\vec{x}(s)\right)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)=0}\,. \tag{46}$$

Uvrštavanjem $\vec{\mathrm{B}}(s)=\dfrac{\vec{x}'(s)\times\vec{x}''(s)}{\left|\vec{x}''(s)\right|}$ u jednadžbu (46) dobivamo:

$$\left(\vec{R}-\vec{x}(s)\right)\cdot\frac{\vec{x}'(s)\times\vec{x}''(s)}{\left|\vec{x}''(s)\right|}=0 \quad \text{odnosno} \quad \underline{\left(\vec{R}-\vec{x}(s)\right)\cdot\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}''(s)\right)=0} \quad \text{ili}$$

$$\boxed{\left(\vec{R}-\vec{x}(s),\vec{x}'(s),\vec{x}''(s)\right)=0}\,. \tag{47}$$

Pritom $\left(\vec{R}-\vec{x}(s),\vec{x}'(s),\vec{x}''(s)\right)$ označava mješoviti produkt vektora $\vec{R}-\vec{x}(s)$, $\vec{x}'(s)$ i $\vec{x}''(s)$, gdje je $\vec{R}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ radij-vektor bilo koje točke u oskulacionoj ravnini krivulje $\mathcal{C}$.

Nadalje, iz $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(s)=\left(x(s),y(s),z(s)\right)$,

$$\vec{R}-\vec{x}(s)=\left(x-x(s),y-y(s),z-z(s)\right),$$

$$\vec{x}'(s)=\left(\dot{x}(s),\dot{y}(s),\dot{z}(s)\right) \quad \text{i}$$

$$\vec{x}''(s)=\left(\ddot{x}(s),\ddot{y}(s),\ddot{z}(s)\right)$$

proizlazi da se jednadžba (47) može pisati u obliku:

$$\begin{vmatrix} x-x(s) & y-y(s) & z-z(s) \\ \dot{x}(s) & \dot{y}(s) & \dot{z}(s) \\ \ddot{x}(s) & \ddot{y}(s) & \ddot{z}(s) \end{vmatrix}=0 \tag{48}$$

- Neka je $\vec{R}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ radij-vektor bilo koje točke (x,y,z) u normalnoj ravnini krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$. Primijetimo da je jedinični vektor tangente $\vec{\mathrm{T}}(s)$ ortogonalan na normalnu ravninu, stoga je jednadžba normalne ravnine u točki $\mathrm{T}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)\in\mathcal{C}$ dana sa:

$$\boxed{\left(\vec{R}-\vec{x}(s)\right)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)=0}\,. \tag{49}$$

Uzimajući u obzir da je $\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{x}'(s)$ iz jednadžbu (49) proizlazi: $\boxed{\left(\vec{R}-\vec{x}(s)\right)\cdot\vec{x}'(s)=0}$,

što se može pisati u obliku: $\underline{\left(x-x(s)\right)\cdot\dot{x}(s)+\left(y-y(s)\right)\cdot\dot{y}(s)+\left(z-z(s)\right)\cdot\dot{z}(s)=0}$.

- Neka je $\vec{R}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ radij-vektor bilo koje točke (x,y,z) u rektifikacionoj ravnini krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$. Primijetimo da je jedinični vektor normale $\vec{\mathrm{N}}(s)$ ortogonalan na rektifikacionu ravninu pa je jednadžba rektifikacione ravnine u točki $\mathrm{T}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)\in\mathcal{C}$ dana sa:

$$\boxed{\left(\vec{R}-\vec{x}(s)\right)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)=0} \quad \text{ili} \quad \boxed{\left(\vec{R}-\vec{x}(s)\right)\cdot\vec{x}''(s)=0}\,, \tag{50}$$

što se može pisati u obliku: $\underline{\left(x-x(s)\right)\cdot\ddot{x}(s)+\left(y-y(s)\right)\cdot\ddot{y}(s)+\left(z-z(s)\right)\cdot\ddot{z}(s)=0}$.