2.5 Zakrivljenosti (fleksija i torzija) prostorne krivulje

U ovom odjeljku promatrati će se regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$ (i specijalno regularne krivulje u ravnini) $\mathcal{C}$ … $\vec{x}=\vec{x}(s)$ parametrizirane duljinom luka za koje je $\vec{\mathrm{T}}(s)\neq\vec{0}$ za svaki s.

Za regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$ definiraju se dvije zakrivljenosti:

- prva zakrivljenost ili fleksija, kojom se brojčano određuje mjera odstupanja krivulje od pravca u bilo kojoj točki te krivulje,
- druga zakrivljenost ili torzija, kojom se određuje izvijanje krivulje iz oskulacione ravnine u bilo kojoj točki te krivulje.

Definicija 2.5.1

Prva zakrivljenost ili fleksija regularne krivulje $\mathcal{C}$ … $\vec{x}=\vec{x}(s)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ je skalarna funkcija $\chi(s)$ koja je jednaka duljini derivacije vektora tangente:

$$\boxed{\chi(s)=\left|\vec{\mathrm{T}}'(s)\right|}\,. \tag{51}$$

Uočimo: $\chi(s)\geq 0$.

Ako postoji $s_{\mathrm{i}}\in[0,\mathrm{L}]\subset\mathbb{R}$ takav da je $\chi(s_{\mathrm{i}})=0$, onda kažemo da je točka $\mathrm{T}_{\mathrm{i}}=\left(x(s_{\mathrm{i}}),y(s_{\mathrm{i}}),z(s_{\mathrm{i}})\right)$ točka izravnavanja krivulje $\mathcal{C}$. U okolini te točke krivulja se ponaša kao pravac (vidi primjer 2.5.3).

Primjenom definicije 2.5.1 imamo da se jedinični vektor glavne normale (definiran u 2.4.3) može pisati u obliku: $\boxed{\vec{\mathrm{N}}(s)=\dfrac{\vec{\mathrm{T}}'(s)}{\chi(s)}}$ ako je $\chi(s)\neq 0$.

Ako je $\chi(s_{\mathrm{i}})=0$, onda u točki $\mathrm{T}_{\mathrm{i}}=\left(x(s_{\mathrm{i}}),y(s_{\mathrm{i}}),z(s_{\mathrm{i}})\right)$ nije određen jedinični vektor glavne normale, a samim time ni jedinični vektor binormale, što povlači da u toj točki nije određena niti jedna od navedenih triju ravnina (oskulaciona, normalna i rektifikaciona).

Definicija 2.5.2

Druga zakrivljenost ili torzija regularne krivulje $\mathcal{C}$ … $\vec{x}=\vec{x}(s)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ je skalarna funkcija $\tau(s)$ definirana sa:

$$\boxed{\tau(s)=-\,\vec{\mathrm{B}}'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)}\,. \tag{52}$$

Za bilo koji fiksni $s_{\mathrm{j}}\in[0,\mathrm{L}]\subset\mathbb{R}$ imamo da je $\tau(s_{\mathrm{j}})\in\mathbb{R}$.
U nastavku će se dati interpretacija vrijednosti torzije u nekoj fiksnoj točki regularne krivulje $\mathcal{C}$.

Prije toga navedimo neke primjere.

Primjer 2.5.3

U primjeru 2.3.7 pokazali smo da je reparametrizacija pravca $\vec{x}(t)=\vec{u}\cdot t+\vec{v}$ po prirodnom parametru s dana sa $\vec{x}(s)=\vec{\mathrm{T}}\cdot s+\vec{v}$, $s\in\left[0,+\infty\right\rangle$, gdje je jedinični vektor tangente $\vec{\mathrm{T}}=\frac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}$ konstantni vektor u bilo kojoj točki tog pravca. Time je $\vec{\mathrm{T}}'=\vec{0}$, odnosno: $\chi(s)=0$ za svaki s. Dakle, zakrivljenost pravca u svakoj njegovoj točki je jednaka nuli.

Primjer 2.5.4

Promatrajmo sada $\vec{x}(s)=\left(r\cos\frac{s}{r},r\sin\frac{s}{r},0\right)$ vektorsku jednadžbu kružnice polumjera $r>0$ (sa središtem u ishodištu) po prirodnom parametru $s\in\left[0,2r\pi\right]$.

U ovom slučaju imamo da je vektorska funkcija $\vec{\mathrm{T}}(s)=\left(-\sin\frac{s}{r},\cos\frac{s}{r},0\right)$ jedinični vektor tangente u bilo kojoj točki te kružnice. Pritom je (vidi primjer 2.4.6)

$$\chi(s)=\left|\vec{\mathrm{T}}'(s)\right|=\frac{1}{r},$$

$$\vec{\mathrm{B}}(s)=(0,0,1),\quad \text{čime je}\quad \vec{\mathrm{B}}'(s)=\vec{0}\quad \text{odnosno}\quad \tau(s)=0\quad \text{za svaki } s\in\left[0,2r\pi\right].$$

Interpretacija:

- fleksija (tj. prva zakrivljenost) je u svakoj točki kružnice obrnuto proporcionalna polumjeru te kružnice,
- torzija (tj. druga zakrivljenost) je u svakoj točki kružnice jednaka nuli.

  Uočimo da je kružnica ravninska krivulja, stoga se ona u nijednoj svojoj točki ne izvija u prostor.

Komentar:

Po intiuciji, bez dokaza, očito je da pravac nije zakrivljen u niti jednoj svojoj točki, ali isto tako da je kružnica bilo kojeg polumjera jednako zakrivljena u svakoj svojoj točki.

Pritom je kružnica manjeg polumjera više zakrivljena od kružnice većeg polumjera, što nam potvrđuje dobiveni identitet: $\chi(s)=\frac{1}{r}$ (koji nam govori da su fleksija i polumjer kružnice obrnuto proporcionalni).

Dakle, izračunavanjem fleksije regularne krivulje u $\mathbb{R}^3$ podrazumijeva se brojčano određivanje mjere odstupanja krivulje od pravca u bilo kojoj točki te krivulje.

Također, po intuiciji očekujemo da će torzija regularne krivulje u ravnini biti jednaka nuli (vidi korolar 2.6.4), jer se ravninska krivulja ne može izvijati iz ravnine (u kojoj je zadana) u prostor.

Primjer 2.5.5

Promatrajmo sada heliks zadan sa:

$$\vec{x}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k} = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \; b > 0.$$

(vidi predavanja, str. 29). Odredite fleksiju $\chi(s)$ i torziju $\tau(s)$ heliksa za bilo koji s.

Budući da još nismo izveli formule za računanje fleksije i torzije za krivulje zadane po proizvoljnom parametru t, nameće se potreba reparametrizacije heliksa po prirodnom parametru s. Fleksiju $\chi(s)$ i torziju $\tau(s)$ izračunati ćemo primjenom definicija 2.5.1 i 2.5.2.

Iz $\vec{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ proizlazi: $\vec{x}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$.

odnosno: $\left|\vec{x}\,'(t)\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

pa je $s(t) = \int_0^t \left|\vec{x}\,'(u)\right| \mathrm{d}u = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \int_0^t \mathrm{d}u = \sqrt{a^2+b^2} \cdot t$

odakle proizlazi: $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

čime je $\vec{x}(s) = \left(a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} s \right)$.

Nadalje, imamo:

$$\vec{x}\,'(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b \right)$$

$$\vec{x}\,''(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} \cdot \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

pa je

$$\vec{\mathrm{T}}(s) = \vec{x}\,'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b \right)$$

$$\vec{\mathrm{T}}\,'(s) = \vec{x}\,''(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \cdot \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

odnosno

$$\boxed{\chi(s) = \left|\vec{\mathrm{T}}\,'(s)\right| = \frac{a}{a^2+b^2}}.$$

Primjenom definicije 2.5.2 imamo: $\tau(s) = -\vec{\mathrm{B}}'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)$,

stoga izračunajmo jedinični vektor glavne normale i derivaciju jediničnog vektora binormale:

$$\vec{\mathrm{N}}(s) = \frac{\vec{\mathrm{T}}'(s)}{\left|\vec{\mathrm{T}}'(s)\right|} = \frac{\frac{a}{a^2+b^2}\cdot\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)}{\frac{a}{a^2+b^2}} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$$

$$\vec{\mathrm{B}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s)\times\vec{\mathrm{N}}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & b \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\left(b\,\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i} + -b\,\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j} + \left(a\,\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + a\,\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\vec{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\left(b\,\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i} + -b\,\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j} + a\,\vec{k}\right)$$

Time je jedinični vektor binormale dan sa:

$$\vec{\mathrm{B}}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\left(b\,\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b\,\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\right)$$

pa je:

$$\vec{\mathrm{B}}'(s) = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\left(b\,\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\,\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

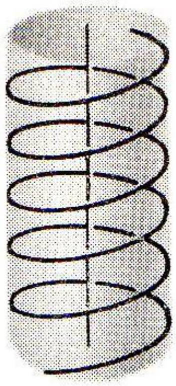
Dobivamo:

$$\tau(s) = -\vec{\mathrm{B}}'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s) = -\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\left(-b\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} - b\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

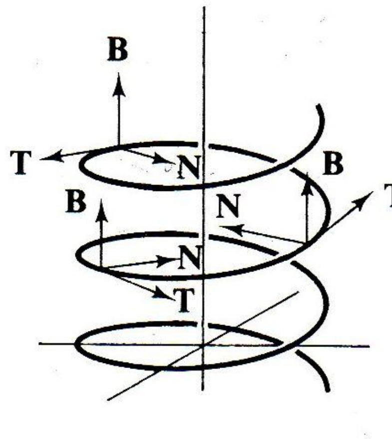
tj. $$\boxed{\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}}.$$

Dakle, za heliks $\vec{x}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right)$, $a>0$, $b>0$ parametriziranog po prirodnom parametru s vrijedi da su obje zakrivljenosti fleksija i torzija konstantne. Iz pretpostavke da je konstanta $b>0$ proizlazi da je torzija $\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2} > 0$ za svaki s, što ima za posljedicu da će heliks probadati oskulacionu ravninu (tj. izvijati se iz oskulacione ravnine) u smjeru jediničnog vektora binormale $\vec{\mathrm{B}}(s)$. U ovom slučaju kažemo da je helix desno orijentiran (vidi sliku 14.a).

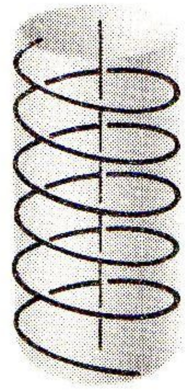
S druge strane za $b<0$ dobili bi da je torzija $\tau(s)=\dfrac{b}{a^2+b^2}<0$ za svaki s, što bi imalo za posljedicu da heliks probada oskulacionu ravninu (tj. izvija se iz oskulacione ravnine) u suprotnom smjeru jediničnog vektora binormale $\vec{\mathrm{B}}(s)$. U tom bi slučaju imali da je helix lijevo orijentiran (vidi sliku 14.c).



slika 14.a
desno orijentiran heliks



slika 14.b
trobrid pratioc u nekim točkama heliksa



slika 14.c
lijevo orijentiran heliks

Izvedimo sada formulu za izračunavanje torzije regularne krivulje $\mathcal{C}$ … $\vec{x}=\vec{x}(s)$, gdje je $s\in[0,\mathrm{L}]\subset\mathbb{R}$.

Primjenom identiteta $\vec{\mathrm{N}}(s)=\dfrac{\vec{\mathrm{T}}'(s)}{\chi(s)}=\dfrac{\vec{x}''(s)}{\chi(s)}$, gdje je $\chi(s)=\left|\vec{\mathrm{T}}'(s)\right|=\left|\vec{x}''(s)\right|\neq 0$, na identitet (52) dobivamo:

$$\tau(s)=-\vec{\mathrm{B}}'(s)\cdot\frac{\vec{x}''(s)}{\chi(s)}. \tag{53}$$

Nadalje iz $\vec{\mathrm{B}}(s)=\vec{\mathrm{T}}(s)\times\vec{\mathrm{N}}(s)=\vec{x}'(s)\times\dfrac{\vec{x}''(s)}{\chi(s)}=\dfrac{1}{\chi(s)}\cdot\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}''(s)\right)$

proizlazi:

$$\vec{\mathrm{B}}'(s)=-\frac{\chi'(s)}{\chi^2(s)}\cdot\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}''(s)\right)+\frac{1}{\chi(s)}\cdot\underbrace{\left(\vec{x}''(s)\times\vec{x}''(s)\right)}_{=\vec{0}}+\frac{1}{\chi(s)}\cdot\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}'''(s)\right)$$

odnosno

$$\vec{\mathrm{B}}'(s)=\frac{1}{\chi(s)}\cdot\left[-\frac{\chi'(s)}{\chi(s)}\cdot\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}''(s)\right)+\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}'''(s)\right)\right]$$

što uvrštavanjem u identitet (53) daje:

$$\tau(s)=-\frac{1}{\chi^2(s)}\cdot\left[-\frac{\chi'(s)}{\chi(s)}\cdot\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}''(s)\right)+\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}'''(s)\right)\right]\cdot\vec{x}''(s)$$

odnosno $$\boxed{\tau(s)=\frac{\left(\vec{x}'(s),\vec{x}''(s),\vec{x}'''(s)\right)}{\chi^2(s)}}. \tag{54}$$

Pritom su se koristila svojstva mješovitog produkta, pri čemu se dobilo:

$$\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}''(s)\right)\cdot\vec{x}''(s)=\left(\vec{x}'(s),\vec{x}''(s),\vec{x}''(s)\right)=0,$$

$$\left(\vec{x}'(s)\times\vec{x}'''(s)\right)\cdot\vec{x}''(s)=\left(\vec{x}'(s),\vec{x}'''(s),\vec{x}''(s)\right)=-\left(\vec{x}'(s),\vec{x}''(s),\vec{x}'''(s)\right).$$

Dobili smo da se torzija regularne krivulje $\mathcal{C}$ … $\vec{x}=\vec{x}(s)$, $s\in[0,\mathrm{L}]\subset\mathbb{R}$ računa po formuli (54).

Podsjetimo se, fleksija regularne krivulje $\mathcal{C}$ … $\vec{x}=\vec{x}(s)$ računa se po formuli $\chi(s)=\left|\vec{x}''(s)\right|$.

Komentar:

Uzimajući u obzir da je

$$\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}+z(s)\,\vec{k}=\left(x(s),y(s),z(s)\right)$$

$$\vec{x}'(s)=\dot{x}(s)\,\vec{i}+\dot{y}(s)\,\vec{j}+\dot{z}(s)\,\vec{k}=\left(\dot{x}(s),\dot{y}(s),\dot{z}(s)\right)$$

$$\vec{x}''(s)=\ddot{x}(s)\,\vec{i}+\ddot{y}(s)\,\vec{j}+\ddot{z}(s)\,\vec{k}=\left(\ddot{x}(s),\ddot{y}(s),\ddot{z}(s)\right)$$

$$\vec{x}'''(s)=\dddot{x}(s)\,\vec{i}+\dddot{y}(s)\,\vec{j}+\dddot{z}(s)\,\vec{k}=\left(\dddot{x}(s),\dddot{y}(s),\dddot{z}(s)\right)$$

dobivamo:

$$\chi(s)=\sqrt{\left(\ddot{x}(s)\right)^2+\left(\ddot{y}(s)\right)^2+\left(\ddot{z}(s)\right)^2}$$

$$\tau(s)=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x}(s) & \dot{y}(s) & \dot{z}(s)\\ \ddot{x}(s) & \ddot{y}(s) & \ddot{z}(s)\\ \dddot{x}(s) & \dddot{y}(s) & \dddot{z}(s)\end{vmatrix}}{\left(\ddot{x}(s)\right)^2+\left(\ddot{y}(s)\right)^2+\left(\ddot{z}(s)\right)^2}$$

Dokažimo sada sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.5.6

Neka je $\vec{x}:[0,\mathrm{L}]\to\mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ takva da je $\chi(s)=0$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]\subset\mathbb{R}$. Tada je ta krivulja $\mathcal{C}$ pravac.

Dokaz:

Neka je krivulja $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirana prirodnim parametrom s i neka je $\chi(s)=0$ za svaki s. Koristeći definiciju 2.5.1 imamo da je: $\left|\vec{\mathrm{T}}'(s)\right|=0$, što povlači da je $\vec{\mathrm{T}}'(s)=\vec{0}$, odnosno da je $\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{\mathrm{T}}$ konstantan vektor.

Nadalje, iz definicije jediničnog vektora tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$ imamo:

$$\vec{x}\,'(s)=\vec{\mathrm{T}}, \qquad \text{gdje je } \vec{\mathrm{T}} \text{ konstantan vektor}$$

ili
$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s}=\vec{\mathrm{T}}$$

pa je
$$\mathrm{d}\vec{x}(s)=\vec{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}s,$$

$$\vec{x}(s)=\int\vec{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}s=\vec{\mathrm{T}}\cdot s+\vec{c}, \qquad \text{gdje je } \vec{\mathrm{c}} \text{ neki konstantan vektor.}$$

Zaključujemo:

ako je $\chi(s)=0$ za svaki s, onda je tražena krivulja pravac.

Primijetimo da je $\vec{x}(s)=\vec{\mathrm{T}}\cdot s+\vec{c}$ (gdje su $\vec{\mathrm{c}}$ i $\vec{\mathrm{T}}$ konstantni vektori) vektorska jednadžba pravca parametriziranog duljinom luka s (usporediti s primjerom 2.3.7).
S druge strane, u primjeru 2.5.3 pokazali smo da je fleksija (tj. prva zakrivljenost) pravca u svakoj njegovoj točki jednaka nuli.

Lema 2.5.7

Neka je $\vec{x}:[0,\mathrm{L}]\to\mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$ u prostoru $\mathbb{R}^3$.
Tada za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]\subset\mathbb{R}$ za koji je $\chi(s)\neq 0$ imamo da je $\{\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{N}}(s),\vec{\mathrm{B}}(s)\}$ ortonormirani skup.

Komentar:

Da bi dokazali lemu potrebno je pokazati da su vektori $\vec{\mathrm{T}}(s)$, $\vec{\mathrm{N}}(s)$ i $\vec{\mathrm{B}}(s)$ jedinični i međusobno ortogonalni (vidi predavanja, str. 47- 48).

Pritom treba imati na umu da za sve one izbore od $s_{\mathrm{i}}\in[0,\mathrm{L}]\subset\mathbb{R}$ za koje je $\chi(s_{\mathrm{i}})=0$ imamo da su pripadne točke $\mathrm{T}_{\mathrm{i}}=(x(s_{\mathrm{i}}),y(s_{\mathrm{i}}),z(s_{\mathrm{i}}))$ na krivulji $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}+z(s)\,\vec{k}$ točke izravnavanja krivulje $\mathcal{C}$, stoga u tim točkama nije određen jedinični vektor glavne normale, ali isto tako niti jedinični vektor binormale.

Iz tog razloga ne možemo govoriti o trobridu pratiocu u točkama izravnavanja krivulje $\mathcal{C}$.

Drugim riječima, kad kažemo da je skup $\{\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{N}}(s),\vec{\mathrm{B}}(s)\}$ <u>trobrid pratioc</u> u točki $\mathrm{T}=(x(s),y(s),z(s))$ krivulje $\mathcal{C}$, onda mislimo da $\mathrm{T}=(x(s),y(s),z(s))$ nije točka izravnavanja krivulje $\mathcal{C}$, što je ekvivalentno uvjetu $\chi(s)\neq 0$.