2.6 Frenet- Serret-ove formule

Neka je $\vec{x}:[0,\mathrm{L}]\to\mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ (po prirodnom parametru s) zadana vektorskom jednadžbom:

$$\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}+z(s)\,\vec{k}=\big(x(s),y(s),z(s)\big)\quad \text{za svaki}\ \ s\in[0,\mathrm{L}].$$

Pritom je zbog regularnosti: $\vec{x}\,'(s)\neq\vec{0}$ ili ekvivalentno: $\left|\vec{x}\,'(s)\right|\neq 0$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$.

Pretpostavimo da je $\vec{x}\,''(s)\neq\vec{0}$, tj. $\chi(s)\neq 0$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$, $\mathrm{L}>0$.

Podsjetimo se, ako pretpostavimo da nijedna točka $\mathrm{T}=\big(x(s),y(s),z(s)\big)$ na krivulji $\mathcal{C}$ nije točka izravnavanja (vidi komentar na str. 58 i definiciju 2.5.1), onda se u svakoj točki T krivulje $\mathcal{C}$ može postaviti trobrid pratioc, tj. ortonormirani skup $\left\{\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{N}}(s),\vec{\mathrm{B}}(s)\right\}$.

U nastavku ćemo odrediti derivacije vektorskih funkcija $\vec{\mathrm{T}}(s)$, $\vec{\mathrm{N}}(s)$ i $\vec{\mathrm{B}}(s)$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$.

Uočimo da je $\vec{\mathrm{T}}\,'(s)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}(s)}{\mathrm{d}s}$, $\vec{\mathrm{N}}\,'(s)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{N}}(s)}{\mathrm{d}s}$, $\vec{\mathrm{B}}\,'(s)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{B}}(s)}{\mathrm{d}s}$.

Teorem 2.6.1 (Frenet-Serret)

Neka je regularna krivulja $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirana prirodnim parametrom s takva da je $\chi(s)\neq 0$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$. Tada je:

$$\vec{\mathrm{T}}\,'(s)=\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s) \tag{55}$$

$$\vec{\mathrm{N}}\,'(s)=-\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)+\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s) \tag{56}$$

$$\vec{\mathrm{B}}\,'(s)=-\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s) \tag{57}$$

Dokaz:

Uočimo da formula (55) direktno proizlazi iz definicije jediničnog vektora glavne normale i definicije prve zakrivljenosti. Dakle, iz $\vec{\mathrm{N}}(s)=\dfrac{\vec{\mathrm{T}}\,'(s)}{\chi(s)}$ proizlazi: $\vec{\mathrm{T}}\,'(s)=\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)$.

✎ Dokažimo formulu (57).

Uočimo da je $\left|\vec{\mathrm{B}}(s)\right|=1$, stoga primjenom leme 2.4.1 proizlazi: $\vec{\mathrm{B}}(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}\,'(s)=0$, odnosno $\vec{\mathrm{B}}(s)\perp\vec{\mathrm{B}}\,'(s)$ na osnovu čega zaključujemo da $\vec{\mathrm{B}}\,'(s)$ može biti kolinearan sa bilo kojim vektorom koji leži u oskulacionoj ravnini ili specijalno sa jediničnim vektorom tangente $\vec{\mathrm{T}}(s)$ ili jediničnim vektorom glavne normale $\vec{\mathrm{N}}(s)$.

Provjerimo najprije u kojem su odnosu $\vec{B}'(s)$ i $\vec{T}(s)$.

Primijetimo: $\vec{B}(s) \perp \vec{T}(s)$ povlači: $\vec{B}(s)\cdot\vec{T}(s) = 0$.

Primjenom leme 2.4.1 i prve Frenet-Serret-ove formule (koju smo prethodno dokazali) dobivamo:

$$\vec{B}'(s)\cdot\vec{T}(s) = -\vec{B}(s)\cdot\vec{T}'(s) = -\vec{B}(s)\cdot\chi(s)\cdot\vec{N}(s) = -\chi(s)\cdot\underbrace{\vec{B}(s)\cdot\vec{N}(s)}_{=0} = 0$$

odakle proizlazi da je: $\vec{B}'(s) \perp \vec{T}(s)$.

Sada se lako vidi da iz $\vec{B}'(s) \perp \vec{T}(s)$ i $\vec{B}'(s) \perp \vec{B}(s)$ proizlazi: $\vec{B}'(s) \parallel \vec{N}(s)$.

Jasno, $\vec{B}'(s) \perp \vec{T}(s)$ i $\vec{B}'(s) \perp \vec{B}(s)$ podrazumijeva da je $\vec{B}'(s)$ ortogonalan na bilo koji vektor iz rektifikacione ravnine (vidi str. 50), što ima za posljedicu da su $\vec{B}'(s)$ i $\vec{N}(s)$ kolinearani, tj. $\vec{B}'(s) = \alpha(s)\cdot\vec{N}(s)$. Treba još dokazati da je $\alpha(s) = -\tau(s)$.

Iz definicije 2.5.2 imamo da je: $\tau(s) = -\vec{B}'(s)\cdot\vec{N}(s)$, odakle dobivamo:

$$\tau(s)\cdot\vec{N}(s) = -\left(\vec{B}'(s)\cdot\vec{N}(s)\right)\cdot\vec{N}(s).$$

Podsjetimo se da za skalarni produkt vektora općenito ne vrijedi svojstvo asocijativnosti.

S druge strane imamo: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}$ i $\vec{c}$ su kolinearni vektori.

Primjenom navedenog i dokazane činjenice da su $\vec{B}'(s)$ i $\vec{N}(s)$ kolinearani imamo:

$$\left(\vec{B}'(s)\cdot\vec{N}(s)\right)\cdot\vec{N}(s) = \vec{B}'(s)\cdot\left(\vec{N}(s)\cdot\vec{N}(s)\right)$$

što povlači da je:

$$\tau(s)\cdot\vec{N}(s) = -\vec{B}'(s)\cdot\left(\vec{N}(s)\cdot\vec{N}(s)\right) = -\vec{B}'(s)\cdot\underbrace{\left|\vec{N}(s)\right|^2}_{=1}$$

odnosno: $\vec{B}'(s) = -\tau(s)\cdot\vec{N}(s)$. Time je dokazana formula (57).

✎ Dokažimo sada formulu (56). Deriviranjem identiteta $\vec{N}(s) = \vec{B}(s)\times\vec{T}(s)$

dobivamo: $$\vec{N}'(s) = \vec{B}'(s)\times\vec{T}(s) + \vec{B}(s)\times\vec{T}'(s)$$

odakle primjenom (dokazanih) formula (55) i (57) proizlazi:

$$\vec{N}'(s) = -\tau(s)\cdot\vec{N}(s)\times\vec{T}(s) + \vec{B}(s)\times\chi(s)\cdot\vec{N}(s) = -\tau(s)\cdot\underbrace{\left(\vec{N}(s)\times\vec{T}(s)\right)}_{=-\vec{B}(s)} + \chi(s)\cdot\underbrace{\left(\vec{B}(s)\times\vec{N}(s)\right)}_{=-\vec{T}(s)}$$

odnosno $\vec{N}'(s) = -\chi(s)\cdot\vec{T}(s) + \tau(s)\cdot\vec{B}(s)$.

Pritom smo koristili da je trobrid pratioc $\left\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\right\}$ desno orijentiran za svaki $s \in [0, L]$.

Komentar 2.6.2

Formule (55), (56) i (57) zajedničkim imenom zovemo Frenet-Serret-ovim formulama, koje u matričnom obliku prikazujemo sljedećom matričnom jednadžbom:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{T}}'(s) \\ \vec{\mathrm{N}}'(s) \\ \vec{\mathrm{B}}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \chi(s) & 0 \\ -\chi(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{T}}(s) \\ \vec{\mathrm{N}}(s) \\ \vec{\mathrm{B}}(s) \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Matrica $\begin{bmatrix} 0 & \chi(s) & 0 \\ -\chi(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix}$ je koso simetrična, gdje je: $\chi(s) > 0$, $\tau(s) \in \mathbb{R}$ $(\forall\, s \in [0, \mathrm{L}])$.

Lema 2.6.3

Neka je $\mathcal{C}$ ... $\vec{x} = \vec{x}(s)$ regularna krivulja u prostoru $\mathbb{R}^3$ (parametrizirana prirodnim parametrom s) i neka je $\chi(s) \neq 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

Jedinični vektor binormale $\vec{\mathrm{B}}(s)$ je konstantan vektor u svakoj točki regularne krivulje $\mathcal{C}$ ako i samo ako je $\tau(s) = 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

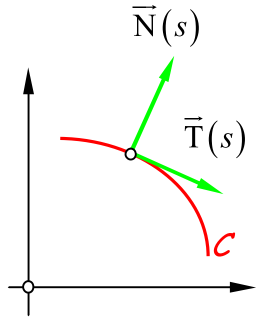
Dokaz:

Pretpostavimo da je $\vec{\mathrm{B}}(s) = \vec{\mathrm{B}}$ (konstantan vektor) za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$. Tada je: $\vec{\mathrm{B}}'(s) = \vec{0}$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$, stoga iz treće Frenet-Serret-ove formule $\vec{\mathrm{B}}'(s) = -\tau(s) \cdot \vec{\mathrm{N}}(s)$ direktno proizlazi da je $\tau(s) = 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$. Uočimo da uvjet $\chi(s) \neq 0$ povlači $\vec{\mathrm{N}}(s) \neq \vec{0}$ $(\forall\, s)$, stoga iz $\vec{0} = -\tau(s) \cdot \underbrace{\vec{\mathrm{N}}(s)}_{\neq \vec{0}}$ proizlazi: $\tau(s) = 0$ $(\forall\, s)$.

Obrat: neka je $\tau(s) = 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$. Tada iz treće Frenet-Serret-ove formule proizlazi $\vec{\mathrm{B}}'(s) = \vec{0}$ $(\forall\, s)$, što povlači da je $\vec{\mathrm{B}}(s) = \vec{\mathrm{B}}$ konstantan vektor za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

Teorem 2.6.4

Neka je $\mathcal{C}$ ... $\vec{x} = \vec{x}(s)$ regularna krivulja u prostoru $\mathbb{R}^3$ takva da je $\chi(s) \neq 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$. Krivulja $\mathcal{C}$ je ravninska ako i samo ako je $\tau(s) = 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.



Dokaz:

Ako je regularna krivulja $\mathcal{C}$ ... $\vec{x} = \vec{x}(s)$ ravninska, tj. ako regularna krivulja $\mathcal{C}$ "leži" u bilo kojoj ravnini prostora $\mathbb{R}^3$, onda je binormala konstantna u svakoj točki te krivulje $\mathcal{C}$, stoga primjenom leme 2.6.3 proizlazi da je $\tau(s) = 0$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

Obrat: neka je $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$ regularna krivulja u prostoru $\mathbb{R}^3$ takva da je u svakoj njenoj točki torzija jednaka nuli. Pritom se podrazumijeva da nijedna točka regularne krivulje $\mathcal{C}$ nije točka izravnavanja, što je posljedica uvjeta $\chi(s)\neq 0$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$.

Primjenom leme 2.6.3 imamo da iz pretpostavke $\tau(s)=0$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$ proizlazi da je $\vec{\mathrm{B}}(s)=\vec{\mathrm{B}}$ konstantan vektor za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$.

Drugim riječima, u svakoj točki regularne krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ imamo ortonormiranu bazu $\left\{\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{N}}(s),\vec{\mathrm{B}}\right\}$, gdje je binormala u svakoj točki te krivulje neki konstantan fiksan vektor (određen svojim smjerom, duljinom i orijentacijom), što ima za posljedicu da krivulja $\mathcal{C}$ mora ležati u nekoj ravnini prostora $\mathbb{R}^3$ na koju je ortogonalna fiksna binormala $\vec{\mathrm{B}}$.

Time je $\mathcal{C}$ ravninska krivulja.

Komentar 2.6.5

Ako je torzija u svakoj točki regularne krivulje $\mathcal{C}$ jednaka nuli ili ekvivalentno ako je jedinični vektor binormale $\vec{\mathrm{B}}(s)=\vec{\mathrm{B}}$ konstantan vektor u svakoj točki krivulje $\mathcal{C}$, onda krivulja $\mathcal{C}$ mora biti ravninska krivulja i ona ujedno leži u oskulacinoj ravnini.

Podsjetimo se, vektor binormale je ortogonalan na oskulacionu ravninu krivulje $\mathcal{C}$, koju razapinju vektori $\vec{\mathrm{T}}(s)$ i $\vec{\mathrm{N}}(s)$.

Zaključujemo:

Ako je $\mathcal{C}$ regularna ravninska krivulja, onda je $\tau(s)=0$ i $\vec{\mathrm{B}}(s)=\vec{\mathrm{B}}$ (konstantan vektor) za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$. Time su **Frenet-Serret-ove formule ravninske krivulje** $\mathcal{C}$ dane sa:

$$\vec{\mathrm{T}}'(s)=\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s), \tag{59}$$

$$\vec{\mathrm{N}}'(s)=-\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s). \tag{60}$$

Propozicija 2.6.6

Regularna ravninska krivulja $\mathcal{C}$ je kružnica ako i samo ako je fleksija u svakoj njenoj točki jednaka fiksiranom konstantnom strogo pozitivnom realnom broju.

Dokaz:

Ako je regularna ravninska krivulja kružnica polumjera $r>0$, onda je fleksija u svakoj točki kružnice obrnuto proporcionalna svom polumjeru $r>0$ (vidi primjer 2.5.4).

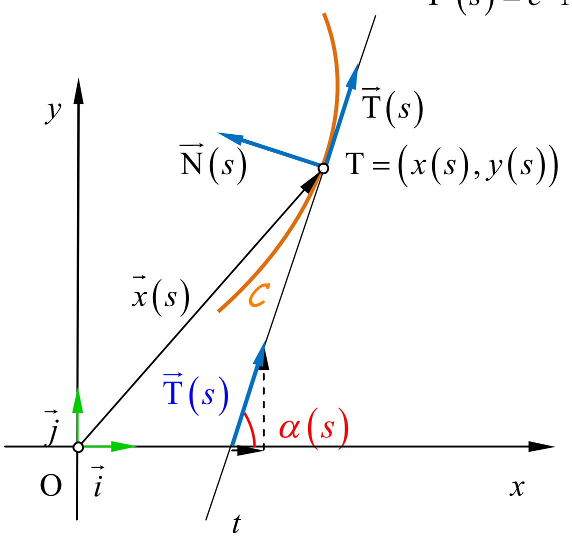
Obrat: pretpostavimo da je $\mathcal{C}$ regularna ravninska krivulja, takva da je fleksija u svakoj njenoj točki jednaka nekom fiksiranom konstantnom strogo pozitivnom realnom broju, tj. neka je:

$$\mathcal{C} \ \ldots \quad \vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j}\ , \tag{61}$$

takva da je $\chi(s) = c$ za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$, gdje je $c > 0$ (c je fiksan realan broj).

Tada primjenom Frenet-Serret-ovih formula (59) i (60) na danu ravninsku krivulju $\mathcal{C}$ imamo:

$$\vec{\mathrm{T}}'(s) = c \cdot \vec{\mathrm{N}}(s), \qquad \vec{\mathrm{N}}'(s) = -c \cdot \vec{\mathrm{T}}(s)\,.$$



Primijetimo:

$$\boxed{\vec{\mathrm{T}}(s) = \cos\alpha(s)\,\vec{i} + \sin\alpha(s)\,\vec{j}} \tag{62}$$

$\vec{\mathrm{N}}(s) \perp \vec{\mathrm{T}}(s)$, stoga imamo:

$$\vec{\mathrm{N}}(s) = \cos\left(\alpha(s) + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\alpha(s) + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$

odnosno:

$$\boxed{\vec{\mathrm{N}}(s) = -\sin\alpha(s)\,\vec{i} + \cos\alpha(s)\,\vec{j}}$$

Deriviranjem jediničnog vektora tangente (62) dobivamo:

$$\vec{\mathrm{T}}'(s) = -\alpha'(s) \cdot \sin\alpha(s)\,\vec{i} + \alpha'(s) \cdot \cos\alpha(s)\,\vec{j} = \alpha'(s) \cdot \left(-\sin\alpha(s)\,\vec{i} + \cos\alpha(s)\,\vec{j}\ \right)$$

odnosno

$$\vec{\mathrm{T}}'(s) = \alpha'(s) \cdot \vec{\mathrm{N}}(s)\,.$$

Uzimajući u obzir da je $\vec{\mathrm{T}}'(s) = c \cdot \vec{\mathrm{N}}(s)$ direktno proizlazi:

$$\alpha'(s) = c$$

odakle je:

$$\boxed{\alpha(s) = c \cdot s + k} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{\mathrm{T}}(s) = \cos(c \cdot s + k)\,\vec{i} + \sin(c \cdot s + k)\,\vec{j}}\,,$$

gdje je k bilo koji realan broj (konstanta).

Nadalje, iz

$$\vec{x}'(s) = \vec{\mathrm{T}}(s)$$

proizlazi:

$$\vec{x}(s) = \int \vec{\mathrm{T}}(s)\ \mathrm{d}s$$

odnosno

$$\vec{x}(s) = \vec{i} \cdot \int \cos(c \cdot s + k)\ \mathrm{d}s + \vec{j} \cdot \int \sin(c \cdot s + k)\ \mathrm{d}s\,.$$

Rješavanjem dobivenih integrala metodom supstitucije proizlazi:

$$\int \cos(c \cdot s + k)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{c}\sin(c \cdot s + k) + c_1, \qquad \int \sin(c \cdot s + k)\ \mathrm{d}s = -\frac{1}{c}\cos(c \cdot s + k) + c_2\,.$$

odnosno

$$\vec{x}(s)=\left(\frac{1}{c}\sin(c\cdot s+k)+c_1\right)\vec{i}+\left(-\frac{1}{c}\cos(c\cdot s+k)+c_2\right)\vec{j}, \tag{63}$$

gdje je: $x(s)=\frac{1}{c}\sin(c\cdot s+k)+c_1$, $y(s)=-\frac{1}{c}\cos(c\cdot s+k)+c_2$.

Sada se lako vidi da vrijedi

$$\left(x(s)-c_1\right)^2+\left(y(s)-c_2\right)^2=\frac{1}{c^2}. \tag{64}$$

Primijetimo da je sa (64) dana jednadžba kružnice polumjera $\frac{1}{c}>0$ sa središtem u točki $\left(c_1,c_2\right)$.

Napomena:

U specijalnom slučaju za $c_1=c_2=0$ iz jednadžbe (63) dobivamo:

$$\vec{x}(s)=\frac{1}{c}\sin(c\cdot s+k)\,\vec{i}-\frac{1}{c}\cos(c\cdot s+k)\,\vec{j},$$

odakle proizlazi: $x(s)=\frac{1}{c}\sin(c\cdot s+k)$, $y(s)=-\frac{1}{c}\cos(c\cdot s+k)$,

čime se dobiva: $\left(x(s)\right)^2+\left(y(s)\right)^2=\frac{1}{c^2}$

jednadžba kružnice polumjera $\frac{1}{c}>0$ sa središtem u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava.

Zaključak:

- Propozicijom 2.6.6 pokazali smo da je kružnica jedina ravninska krivulja za koju vrijedi da je u svakoj njezinoj točki fleksija jednaka nekom fiksnom strogo pozitivnom realnom broju. Pritom je fleksija kružnice obrnuto proporcionalna polumjeru te kružnice.

- Propozicijom 2.5.6 pokazali smo da je pravac jedina ravninska krivulja za koju vrijedi da je u svakoj njegovoj točki fleksija jednaka nuli.