2.7 Izračunavanje trobrida pratioca, fleksije i torzije regularne krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirane parametrom *t*

U ovom odjeljku izvesti ćemo formule za izračunavanje jediničnih vektora tangente, glavne normale i binormale te fleksije i torzije u bilo kojoj točki regularne krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirane po proizvoljnom parametru t. Kreće se s idejom da se promatra regularna krivulja parametrizirana duljinom luka $s \geq 0$, koju ćemo reparametrizirati po proizvoljnom parametru t.

Dakle, pretpostavimo da je regularna krivulja $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ zadana vektorskom jednadžbom:

$$\mathcal{C} \ \ldots \ \vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k}\,,$$

gdje je: $\quad \vec{x}\,'(s) \neq \vec{0}$ ili ekvivalentno: $\left|\vec{x}\,'(s)\right| \neq 0$ (uvjet regularnosti),

$\qquad \vec{x}\,''(s) \neq \vec{0}$ ili $\chi(s) = \left|\vec{x}\,''(s)\right| \neq 0$ (nema točaka izravnavanja na krivulji $\mathcal{C}$)

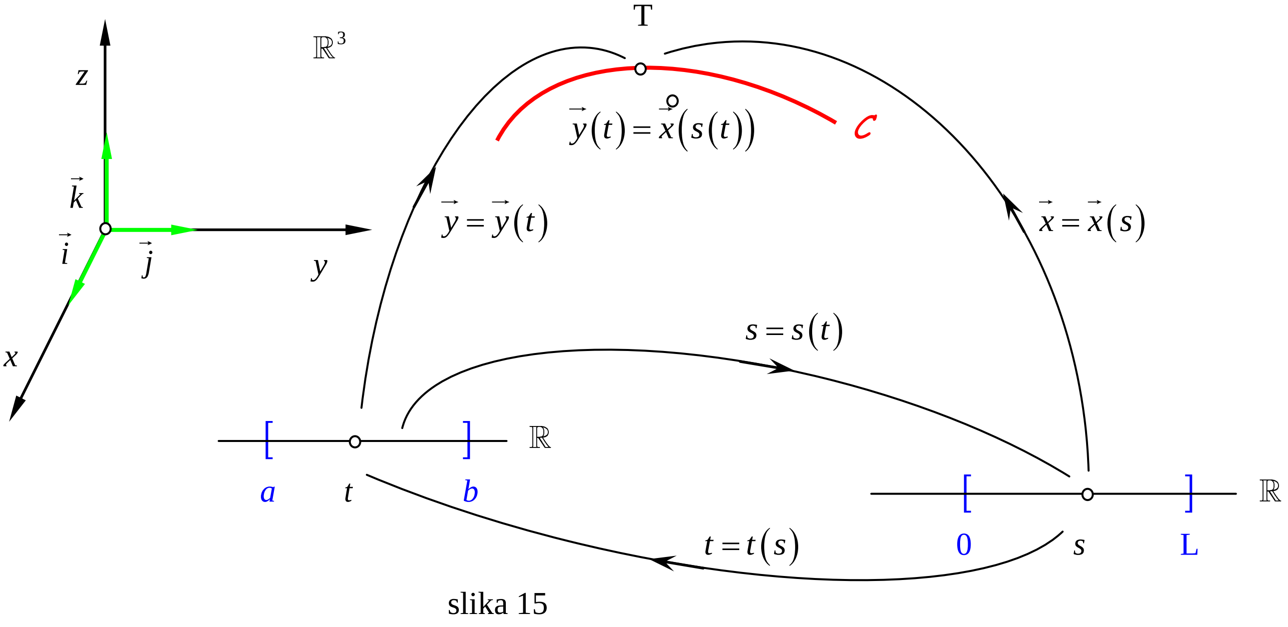
za svaki $s \in [0, \mathrm{L}]$.

Tada su elementi trobrida pratioca u svakoj točki $\mathrm{T} = (x(s), y(s), z(s))$ krivulje $\mathcal{C}$ jednoznačno određeni formulama: $\quad \vec{\mathrm{T}}(s) = \vec{x}\,'(s), \qquad \vec{\mathrm{N}}(s) = \dfrac{\vec{\mathrm{T}}\,'(s)}{\chi(s)}, \qquad \vec{\mathrm{B}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) \times \vec{\mathrm{N}}(s)$.

- Reparametrizirajmo krivulju $\mathcal{C}$ po proizvoljnom parametru t.

Uzimajući u obzir da je skalarna funkcija $s = s(t)$ bijekcija definirana sa: $s(t) = \int_a^t \left|\vec{x}\,'(u)\right| du$ za svaki $t \in [a, b]$, pri čemu je: $s(a) = 0$, $s(b) = \mathrm{L}$ te primjenom teorema 2.1.10 imamo da je:

$$\boxed{\vec{y}(t) = \vec{x}(s(t))}\,.$$



slika 15

Pritom razlikujemo:

(1) $\vec{x}=\vec{x}(s)$ ili raspisano $\vec{x}(s)=x(s)\,\vec{i}+y(s)\,\vec{j}+z(s)\,\vec{k}$ za svaki $s\in[0,\mathrm{L}]$,

vektorsku jednadžbu regularne krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^3$ parametrizirane duljinom luka s

(2) $\vec{y}=\vec{y}(t)$ ili raspisano $\vec{y}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}$ za svaki $t\in[a,b]$,

vektorsku jednadžbu te iste regularne krivulje $\mathcal{C}$ u $\mathbb{R}^3$ parametrizirane proizvoljnim parametrom t.

Jasno iz uvjeta regularnosti krivulje $\mathcal{C}$ proizlazi:

$$\vec{x}\,'(s)\neq\vec{0}\quad(\forall\, s\in[0,\mathrm{L}])\quad \text{i analogno:}\quad \vec{y}\,'(t)\neq\vec{0}\quad(\forall\, t\in[a,b]).$$

Deriviranjem identiteta $\vec{y}(t)=\vec{x}(s(t))$

dobivamo

$$\vec{y}\,'(t)=\vec{x}\,'(s(t))\cdot s'(t). \tag{65}$$

gdje je $s'(t)\neq 0$ (jer je $s=s(t)$ skalarna funkcija, koja nije konstantna).

Zapišimo identitet (65) u obliku:

$$\frac{\vec{y}\,'(t)}{s'(t)}=\vec{x}\,'(s(t)). \tag{66}$$

Uočimo da je $\vec{\mathrm{T}}(s(t))=\vec{x}\,'(s(t))$ jedinični vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}$ zadanu sa $\vec{x}=\vec{x}(s)$, gdje je $s=s(t)$ za svaki $t\in[a,b]$. Time se identitet (66) može pisati u obliku $\dfrac{\vec{y}\,'(t)}{s'(t)}=\vec{\mathrm{T}}(s(t))$

ili

$$\boxed{\vec{y}\,'(t)=\vec{\mathrm{T}}(s(t))\cdot s'(t)}\,. \tag{67}$$

Primjenom propozicije 2.1.12 imamo da je $\vec{\mathrm{T}}(t)=\pm\,\vec{\mathrm{T}}(s(t))$, stoga (ako zanemarimo predznak, tj. orijentaciju jediničnog vektora tangente) iz navedenog proizlazi da je $\vec{\mathrm{T}}(t)=\dfrac{\vec{y}\,'(t)}{s'(t)}$ jedinični vektor tangente na (reparametriziranu) regularnu krivulju $\mathcal{C}$ ... $\vec{y}=\vec{y}(t)$, $t\in[a,b]$.

Pritom se očekuje da je $s'(t)=\left|\vec{y}\,'(t)\right|$.

Iz identiteta (66) proizlazi: $\left|\dfrac{\vec{y}\,'(t)}{s'(t)}\right|=\left|\vec{x}\,'(s)\right|$ odnosno $\dfrac{\left|\vec{y}\,'(t)\right|}{s'(t)}=1$

odakle je: $s'(t)=\left|\vec{y}\,'(t)\right|$.

Pritom se koristilo da je: $\left|\vec{x}\,'(s)\right|=1$ (definicija 2.3.5).

Time je $\vec{\mathrm{T}}(t)=\dfrac{\vec{y}\,'(t)}{\left|\vec{y}\,'(t)\right|}$ jedinični vektor tangente na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ ... $\vec{y}=\vec{y}(t)$, $t\in[a,b]$.

Prije nego li izvedemo formule za izračunavanje jediničnog vektora glavne normale $\vec{\mathrm{N}}(t)$ i jediničnog vektora binormale $\vec{\mathrm{B}}(t)$ na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ ... $\vec{y}=\vec{y}(t)$, $t\in[a,b]$, dokazati ćemo sljedeću propoziciju, koja nam daje formulu za izračunavanje fleksije u bilo kojoj točki regularne krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{y}=\vec{y}(t)$, $t\in[a,b]$.

Propozicija 2.7.1

Neka je regularna krivulja $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom t

$$\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{y}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k} \qquad \text{za svaki } t\in[a,b].$$

Tada se fleksija regularne krivulje $\mathcal{C}$ izračunava prema formuli:

$$\boxed{\chi(t)=\frac{\left|\vec{y}\,'(t)\times\vec{y}\,''(t)\right|}{\left|\vec{y}\,'(t)\right|^3}}\,. \tag{68}$$

Dokaz:

Deriviranjem identiteta (67), tj. $\vec{y}\,'(t)=\vec{\mathrm{T}}(s(t))\cdot s'(t)$
dobivamo

$$\vec{y}\,''(t)=\vec{\mathrm{T}}'(s(t))\cdot s'(t)\cdot s'(t)+\vec{\mathrm{T}}(s(t))\cdot s''(t),$$

odnosno

$$\vec{y}\,''(t)=\chi(s(t))\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t))\cdot(s'(t))^2+\vec{\mathrm{T}}(s(t))\cdot s''(t)$$

ili

$$\vec{y}\,''(t)=s''(t)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t))+\chi(s(t))\cdot(s'(t))^2\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t)) \tag{69}$$

pri čemu smo koristili prvu Frenet-Serret-ovu formulu, prema kojoj je:

$$\vec{\mathrm{T}}'(s(t))=\chi(s(t))\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t)).$$

Nadalje, dobivamo

$$\vec{y}\,'(t)\times\vec{y}\,''(t)=\left(\vec{\mathrm{T}}(s(t))\cdot s'(t)\right)\times\left(s''(t)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t))+\chi(s(t))\cdot(s'(t))^2\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t))\right). \tag{70}$$

Uzimajući u obzir da su $\chi(s(t))$ i $s(t)$, a samim time i $s'(t)$, $(s'(t))^2$, $s''(t)$ skalarne funkcije te primjenom svojstva vektorskog produkta dobivamo da se identitet (70) može pisati u obliku:

$$\vec{y}\,'(t)\times\vec{y}\,''(t)=s'(t)\cdot s''(t)\cdot\underbrace{\left(\vec{\mathrm{T}}(s(t))\times\vec{\mathrm{T}}(s(t))\right)}_{=\vec{0}}+\chi(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\underbrace{\left(\vec{\mathrm{T}}(s(t))\times\vec{\mathrm{N}}(s(t))\right)}_{=\vec{\mathrm{B}}(s(t))}$$

odnosno $\qquad \vec{y}\,'(t)\times\vec{y}\,''(t)=\chi(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\vec{\mathrm{B}}(s(t))$

odakle dobivamo: $\qquad \left|\vec{y}\,'(t)\times\vec{y}\,''(t)\right|=\left|\chi(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\vec{\mathrm{B}}(s(t))\right|$

ili $$\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right| = \left|\chi(s(t))\right|\cdot\left|\left(s'(t)\right)^3\right|\cdot\left|\vec{\mathrm{B}}(s(t))\right|. \tag{71}$$

Koristeći svojsva da je

(i) fleksija je nenegativan realan broj, tj. $\chi(s(t)) \geq 0$,

(ii) $s'(t) = \left|\vec{y}'(t)\right| \geq 0$, (vidi str. 66),

(iii) $\left|\vec{\mathrm{B}}(s(t))\right| = 1$ (tj. $\vec{\mathrm{B}}(s(t))$ je jedinični vektor binormale)

iz identiteta (71) proizlazi: $$\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right| = \chi(s(t))\cdot\left|\vec{y}'(t)\right|^3$$

odakle je: $$\chi(s(t)) = \frac{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|}{\left|\vec{y}'(t)\right|^3}. \tag{72}$$

Primijetimo da je $\chi(t) = \chi(s(t))$, jer je regularna krivulja $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ zadana s dvije parametrizacije (na prethodno opisan način). Time iz identiteta (72) proizlazi traženi identitet (68).

Propozicija 2.7.2

Neka je regularna krivulja $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom t

$$\mathcal{C} \;...\; \vec{y}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

i neka je $\chi(t) \neq 0$ $\left(\text{ili ekvivalentno } \left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right| \neq 0\right)$ za svaki $t \in [a,b]$.

Tada se elementi trobrida pratioca $\left\{\vec{\mathrm{T}}(t), \vec{\mathrm{N}}(t), \vec{\mathrm{B}}(t)\right\}$ krivulje $\mathcal{C}$ izračunavaju na sljedeći način:

$$\vec{\mathrm{T}}(t) = \frac{\vec{y}'(t)}{\left|\vec{y}'(t)\right|} \tag{73}$$

$$\vec{\mathrm{N}}(t) = \frac{\left(\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right)\times\vec{y}'(t)}{\left|\vec{y}'(t)\right|\cdot\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|} \tag{74}$$

$$\vec{\mathrm{B}}(t) = \frac{\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)}{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|} \tag{75}$$

Dokaz:

Dokaz formule (73) proizlazi iz razmatranja provedenih na str.66.

Dokažimo najprije formulu (75).

Primijetimo da smo iz identiteta (70) dobili $\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t) = \chi(s(t))\cdot\left(s'(t)\right)^3\cdot\vec{\mathrm{B}}(s(t))$, odakle proizlazi:

$$\vec{\mathrm{B}}(s(t))=\frac{\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)}{\chi(s(t))\cdot(s'(t))^3}.$$

Nadalje, primjenom identiteta (72) i svojstva: $s'(t)=\left|\vec{y}'(t)\right|$ dobivamo:

$$\vec{\mathrm{B}}(s(t))=\frac{\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)}{\dfrac{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|}{\left|\vec{y}'(t)\right|^3}\cdot\left|\vec{y}'(t)\right|^3}=\frac{\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)}{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|}$$

što dokazuje formulu (75), jer je: $\vec{\mathrm{B}}(t)=\vec{\mathrm{B}}(s(t))$.

Dokažimo sada formulu (74).

Uzimajuću o obzir da je trobrid pratioc $\left\{\vec{\mathrm{T}}(t),\vec{\mathrm{N}}(t),\vec{\mathrm{B}}(t)\right\}$ desno orijentiran za svaki $t\in[a,b]$ imamo da je $\vec{\mathrm{N}}(t)=\vec{\mathrm{B}}(t)\times\vec{\mathrm{T}}(t)$, čime se dobiva:

$$\vec{\mathrm{N}}(t)=\left(\frac{\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)}{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|}\right)\times\left(\frac{\vec{y}'(t)}{\left|\vec{y}'(t)\right|}\right)=\frac{\left(\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right)\times\vec{y}'(t)}{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|\cdot\left|\vec{y}'(t)\right|}$$

što dokazuje formulu (74). Time je propozicija dokazana.

Izračunajmo sada torziju u bilo kojoj točki regularne krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{y}=\vec{y}(t)$, $t\in[a,b]$.

Propozicija 2.7.3

Neka je regularna krivulja $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom t

$$\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{y}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}$$

i neka je $\chi(t)\neq 0$ $\left(\text{ili ekvivalentno } \left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|\neq 0\right)$ za svaki $t\in[a,b]$.

Tada se torzija regularne krivulje $\mathcal{C}$ izračunava prema formuli:

$$\tau(t)=\frac{\left(\vec{y}'(t),\vec{y}''(t),\vec{y}'''(t)\right)}{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|^2}. \tag{76}$$

Dokaz:

Podsjetimo se, deriviranjem identiteta $\vec{y}(t)=\vec{x}(s(t))$ dobivamo $\vec{y}'(t)=\vec{x}'(s(t))\cdot s'(t)$,

što se može zapisati u obliku: $\vec{y}'(t)=\vec{\mathrm{T}}(s(t))\cdot s'(t)$.

Nadalje dobivamo: $\vec{y}''(t)=s''(t)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t))+\chi(s(t))\cdot(s'(t))^2\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t))$

te deriviranjem po parametru t dobivamo:

$$\begin{aligned}\vec{y}'''(t) &= s'''(t)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t)) + s''(t)\cdot\vec{\mathrm{T}}'(s(t))\cdot s'(t) + \chi'(s(t))\cdot s'(t)\cdot(s'(t))^2\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t))\\ &\quad +\chi(s(t))\cdot 2\cdot s'(t)\cdot s''(t)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t)) + \chi(s(t))\cdot(s'(t))^2\cdot\vec{\mathrm{N}}'(s(t))\cdot s'(t)\\ &= s'''(t)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t)) + s'(t)\cdot s''(t)\cdot\vec{\mathrm{T}}'(s(t)) + \chi'(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t))\\ &\quad +2\cdot\chi(s(t))\cdot s'(t)\cdot s''(t)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t)) + \chi(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\vec{\mathrm{N}}'(s(t)),\end{aligned}$$

stoga primjenom Frenet-Serret-ova formula (55) i (56), prema kojima je:

$$\vec{\mathrm{T}}'(s(t)) = \chi(s(t))\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t)),$$

$$\vec{\mathrm{N}}'(s(t)) = -\chi(s(t))\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t)) + \tau(s(t))\cdot\vec{\mathrm{B}}(s(t))$$

dobivamo:

$$\begin{aligned}\vec{y}'''(t) &= s'''(t)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t)) + s'(t)\cdot s''(t)\cdot\chi(s(t))\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t)) + \chi'(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t))\\ &\quad +2\cdot\chi(s(t))\cdot s'(t)\cdot s''(t)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t)) - (\chi(s(t)))^2\cdot(s'(t))^3\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t))\\ &\quad +\chi(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\tau(s(t))\cdot\vec{\mathrm{B}}(s(t)),\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\vec{y}'''(t) &= \left(s'''(t) - (\chi(s(t)))^2\cdot(s'(t))^3\right)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t))\\ &\quad +\left(3\cdot\chi(s(t))\cdot s'(t)\cdot s''(t) + \chi'(s(t))\cdot(s'(t))^3\right)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t))\\ &\quad +\chi(s(t))\cdot\tau(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\vec{\mathrm{B}}(s(t)).\end{aligned} \tag{77}$$

Izračunajmo sada mješoviti produkt vektorskih funkcija $\vec{y}'(t)$, $\vec{y}''(t)$ i $\vec{y}'''(t)$, pri čemu će se koristiti prethodno dobiveno $\underline{\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t) = \chi(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\vec{\mathrm{B}}(s(t))}$ (vidi str. 68) i identitet (77)

$$\begin{aligned}\left(\vec{y}'(t),\vec{y}''(t),\vec{y}'''(t)\right) &= \left(\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right)\cdot\vec{y}'''(t) =\\ &= \chi(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\chi(s(t))\cdot\tau(s(t))\cdot(s'(t))^3\cdot\underbrace{\vec{\mathrm{B}}(s(t))\cdot\vec{\mathrm{B}}(s(t))}_{=\left|\vec{\mathrm{B}}(s(t))\right|^2=1}\end{aligned}$$

čime je:

$$\left(\vec{y}'(t),\vec{y}''(t),\vec{y}'''(t)\right) = (\chi(s(t)))^2\cdot\tau(s(t))\cdot(s'(t))^6. \tag{78}$$

Jasno, pri izračunu primijenili smo svojstvo da je $\vec{\mathrm{B}}(s(t))\cdot\vec{\mathrm{T}}(s(t)) = 0$ i $\vec{\mathrm{B}}(s(t))\cdot\vec{\mathrm{N}}(s(t)) = 0$.

Uzimajući u obzir da je $\tau(t) = \tau(s(t))$, $\chi(t)\left(=\chi(s(t))\right) = \dfrac{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|}{\left|\vec{y}'(t)\right|^3}$ i $s'(t) = \left|\vec{y}'(t)\right|$,

dobivamo $\quad (\chi(s(t)))^2\cdot(s'(t))^6 = \dfrac{\left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|^2}{\left|\vec{y}'(t)\right|^6}\cdot\left|\vec{y}'(t)\right|^6 = \left|\vec{y}'(t)\times\vec{y}''(t)\right|^2.$

Sada se lako vidi da iz dobivenog i identiteta (78) proizlazi traženi identitet (76).

Propozicija 2.7.4

Neka je regularna krivulja $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ parametrizirana proizvoljnim parametrom t

$$\mathcal{C} \ \ldots \quad \vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

i neka je $\chi(t) \neq 0$ i $v(t) = \left|\vec{x}\,'(t)\right|$ za svaki $t \in [a,b]$. Tada je:

$$\vec{\mathrm{T}}\,'(t) = \chi(t)\cdot v(t)\cdot \vec{\mathrm{N}}(t)$$

$$\vec{\mathrm{N}}\,'(t) = -\chi(t)\cdot v(t)\cdot \vec{\mathrm{T}}(t) + \tau(t)\cdot v(t)\cdot \vec{\mathrm{B}}(t)$$

$$\vec{\mathrm{B}}\,'(t) = -\,\tau(t)\cdot v(t)\cdot \vec{\mathrm{N}}(t)$$

Komentar 2.7.5

Ako je $\vec{x}:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ zadane vektorskom jednadžbom:

$$\mathcal{C} \ \ldots \quad \vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

gdje je: $\vec{x}\,'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in [a,b]$, onda se fleksija i torzija regularne krivulje $\mathcal{C}$ izračunavaju po formulama:

$$\chi(t) = \frac{\left|\,\vec{x}\,'(t)\times\vec{x}\,''(t)\,\right|}{\left|\,\vec{x}\,'(t)\,\right|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{\left(\vec{x}\,'(t), \vec{x}\,''(t), \vec{x}\,'''(t)\right)}{\left|\vec{x}\,'(t)\times\vec{x}\,''(t)\right|^2},$$

gdje je $\left|\vec{x}\,'(t)\times\vec{x}\,''(t)\right| \neq 0$ (ili ekvivalentno $\chi(t) \neq 0$) za svaki $t \in [a,b]$.

Pritom su elementi trobrida pratioca u svakoj točki $\mathrm{T} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ krivulje $\mathcal{C}$ jednoznačno određeni formulama:

$$\vec{\mathrm{T}}(t) = \frac{\vec{x}\,'(t)}{\left|\vec{x}\,'(t)\right|}, \qquad \vec{\mathrm{N}}(t) = \frac{\left(\vec{x}\,'(t)\times\vec{x}\,''(t)\right)\times\vec{x}\,'(t)}{\left|\vec{x}\,'(t)\right|\cdot\left|\,\vec{x}\,'(t)\times\vec{x}\,''(t)\,\right|}, \qquad \vec{\mathrm{B}}(t) = \frac{\vec{x}\,'(t)\times\vec{x}\,''(t)}{\left|\vec{x}\,'(t)\times\vec{x}\,''(t)\right|}.$$

Podsjetimo se, iz pretpostavke $\chi(t) \neq 0$ za svaki $t \in [a,b]$ proizlazi da nijedna točka $\mathrm{T} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ krivulje $\mathcal{C}$ nije točka izravnavanja te krivulje.

Jasno, u točki izravnavanja krivulje $\mathcal{C}$ nije definiran trobrid pratioc kao ni torzija.

Nadalje, podrazumijeva se da je trobrid pratioc $\left\{\vec{\mathrm{T}}(t), \vec{\mathrm{N}}(t), \vec{\mathrm{B}}(t)\right\}$ desno orijentirani ortonormirani skup za svaki $t \in [a,b]$, stoga je:

$$\vec{\mathrm{T}}(t) = \vec{\mathrm{N}}(t)\times\vec{\mathrm{B}}(t), \quad \vec{\mathrm{N}}(t) = \vec{\mathrm{B}}(t)\times\vec{\mathrm{T}}(t), \quad \vec{\mathrm{B}}(t) = \vec{\mathrm{T}}(t)\times\vec{\mathrm{N}}(t).$$