2.8 Kanonsko predočenje regularne krivulje

U ovom ćemo odjeljku regularnu prostornu krivulju $\mathcal{C}$, zadanu vektorskom jednadžbom

$$\mathcal{C} \ldots \ \vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k}, \quad \vec{x}\,'(s) \neq \vec{0} \quad \text{za svaki } s \in [0, \mathrm{L}],$$

razviti u Taylor-ov red u u bilo kojoj njenoj proizvoljnoj točki.

Pritom se uz uvjet regularnosti $\left(\vec{x}\,'(s) \neq \vec{0}\right)$ krivulje $\mathcal{C}$ pretpostavlja da krivulja nema nijednu točku izravnavanja $\left(\text{tj. } \vec{x}\,''(s) \neq \vec{0} \text{ za svaki } s \in [0, \mathrm{L}]\right)$.

✐ Podsjetimo se, razvoj funkcije $\vec{x} = \vec{x}(s)$ u Taylor-ov red u okolini bilo koje točke $\mathrm{T_i} = \left(x(s_\mathrm{i}), y(s_\mathrm{i}), z(s_\mathrm{i})\right)$ krivulje $\mathcal{C}$ dan je izrazom:

$$\vec{x}(s) = \vec{x}(s_\mathrm{i}) + \frac{\vec{x}\,'(s_\mathrm{i})}{1!}\cdot(s - s_\mathrm{i}) + \frac{\vec{x}\,''(s_\mathrm{i})}{2!}\cdot(s - s_\mathrm{i})^2 + \cdots + \frac{\vec{x}^{(\mathrm{n})}(s_\mathrm{i})}{\mathrm{n}!}\cdot(s - s_\mathrm{i})^\mathrm{n} + \cdots \tag{79}$$

koji se za $s_0 = 0$ zapisuje u obliku:

$$\vec{x}(s) = \vec{x}(0) + \frac{\vec{x}\,'(0)}{1!}\cdot s + \frac{\vec{x}\,''(0)}{2!}\cdot s^2 + \cdots + \frac{\vec{x}^{(\mathrm{n})}(0)}{\mathrm{n}!}\cdot s^\mathrm{n} + \cdots \tag{80}$$

Jasno, sa (80) je dan razvoj vektorske funkcije $\vec{x} = \vec{x}(s)$ u Taylor-ov red u okolini početne točke $\mathrm{T_0} = \left(x(0), y(0), z(0)\right)$ krivulje $\mathcal{C}$.

- Slijedi izračunavanje derivacija funkcije $\vec{x} = \vec{x}(s)$, $s \in [0, \mathrm{L}]$. Primjenom Frenet-Serret-ovih formula

$$\vec{\mathrm{T}}\,'(s) = \chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)$$
$$\vec{\mathrm{N}}\,'(s) = -\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s) + \tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)$$
$$\vec{\mathrm{B}}\,'(s) = -\,\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)$$

dobivamo:

$$\underline{\vec{x}\,'(s) = \vec{\mathrm{T}}(s)},$$

$$\underline{\vec{x}\,''(s)} = \vec{\mathrm{T}}\,'(s) \ \underline{= \chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)},$$

$$\vec{x}\,'''(s) = \vec{\mathrm{T}}\,''(s) = \chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s) + \chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}\,'(s) = \chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s) + \chi(s)\cdot\left(-\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s) + \tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)\right)$$
$$= \chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s) - \chi^2(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s) + \chi(s)\cdot\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)$$

$$\underline{\vec{x}\,'''(s) = -\chi^2(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s) + \chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s) + \chi(s)\cdot\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)}$$

$$\vec{x}''''(s)=-2\chi(s)\cdot\chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)-\chi^2(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}'(s)+\chi''(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)+\chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}'(s)+$$
$$+\chi'(s)\cdot\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)+\chi(s)\cdot\tau'(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)+\chi(s)\cdot\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}'(s)$$
$$=-2\chi(s)\cdot\chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)-\chi^2(s)\cdot\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)+\chi''(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)$$
$$+\chi'(s)\cdot\left(-\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)+\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)\right)+$$
$$+\chi'(s)\cdot\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)+\chi(s)\cdot\tau'(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)+\chi(s)\cdot\tau(s)\cdot\left(-\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)\right)$$
$$=-2\chi(s)\cdot\chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)-\chi^3(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)+\chi''(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)$$
$$-\chi(s)\cdot\chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)+\chi'(s)\cdot\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)$$
$$+\chi'(s)\cdot\tau(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)+\chi(s)\cdot\tau'(s)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)-\chi(s)\cdot\tau^2(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)$$
$$\underline{\vec{x}''''(s)=-3\chi(s)\cdot\chi'(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s)+\left(-\chi^3(s)+\chi''(s)-\chi(s)\cdot\tau^2(s)\right)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)}$$
$$\underline{+\left(2\chi'(s)\cdot\tau(s)+\chi(s)\cdot\tau'(s)\right)\cdot\vec{\mathrm{B}}(s)}$$
$$\vdots$$

Za $s=0$ imamo:

$$\vec{x}'(0)=\overrightarrow{\mathrm{T}_0},$$
$$\vec{x}''(0)=\chi_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0},$$
$$\vec{x}'''(0)=-\chi_0^2\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}+\dot{\chi}_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}+\chi_0\cdot\tau_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$$
$$\vec{x}''''(0)=-3\chi_0\cdot\dot{\chi}_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}+\left(-\chi_0^3+\ddot{\chi}_0-\chi_0\cdot\tau_0^2\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}+\left(2\dot{\chi}_0\cdot\tau_0+\chi_0\cdot\dot{\tau}_0\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$$
$$\vdots$$

pri čemu smo koristili oznake:

$$\overrightarrow{\mathrm{T}_0}=\vec{\mathrm{T}}(0),\quad \overrightarrow{\mathrm{N}_0}=\vec{\mathrm{N}}(0),\quad \overrightarrow{\mathrm{B}_0}=\vec{\mathrm{B}}(0),$$
$$\chi_0=\chi(0),\quad \dot{\chi}_0=\chi'(0),\quad \ddot{\chi}_0=\chi''(0),$$
$$\tau_0=\tau(0),\quad \dot{\tau}_0=\tau'(0).$$

Lako se vidi da je u ovom slučaju razvoj (80) dan sa:

$$\vec{x}(s)=\vec{x}(0)+\frac{\overrightarrow{\mathrm{T}_0}}{1!}\cdot s+\frac{\chi_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}}{2!}\cdot s^2+\frac{-\chi_0^2\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}+\dot{\chi}_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}+\chi_0\cdot\tau_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_0}}{3!}\cdot s^3+$$
$$+\frac{-3\chi_0\cdot\dot{\chi}_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}+\left(-\chi_0^3+\ddot{\chi}_0-\chi_0\cdot\tau_0^2\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}+\left(2\dot{\chi}_0\cdot\tau_0+\chi_0\cdot\dot{\tau}_0\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_0}}{4!}\cdot s^4+\cdots$$

odnosno

$$\vec{x}(s)=\vec{x}(0)+\frac{s}{1!}\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}+\chi_0\cdot\frac{s^2}{2!}\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}-\chi_0^2\cdot\frac{s^3}{3!}\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}+\dot{\chi}_0\cdot\frac{s^3}{3!}\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}+\chi_0\cdot\tau_0\cdot\frac{s^3}{3!}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_0}+$$
$$-3\chi_0\cdot\dot{\chi}_0\cdot\frac{s^4}{4!}\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}+\left(-\chi_0^3+\ddot{\chi}_0-\chi_0\cdot\tau_0^2\right)\cdot\frac{s^4}{4!}\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}+\left(2\dot{\chi}_0\cdot\tau_0+\chi_0\cdot\dot{\tau}_0\right)\cdot\frac{s^4}{4!}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_0}+\cdots$$

čime se dobiva da je u okolini točke $\mathrm{T}_0=\left(x(0),y(0),z(0)\right)\in\mathcal{C}$ **kanonski razvoj regularne prostorne krivulje** $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$ dan sa:.

$$\begin{aligned}\vec{x}(s)=\vec{x}(0)&+\left[\frac{s}{1!}-\chi_0^2\cdot\frac{s^3}{3!}-3\chi_0\cdot\dot{\chi}_0\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\right]\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}\\&+\left[\chi_0\cdot\frac{s^2}{2!}+\dot{\chi}_0\cdot\frac{s^3}{3!}+\left(-\chi_0^3+\ddot{\chi}_0-\chi_0\cdot\tau_0^2\right)\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\right]\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}\\&+\left[\chi_0\cdot\tau_0\cdot\frac{s^3}{3!}+\left(2\dot{\chi}_0\cdot\tau_0+\chi_0\cdot\dot{\tau}_0\right)\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\right]\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_0}\end{aligned}\tag{81}$$

Pritom su $\overrightarrow{\mathrm{T}_0}$, $\overrightarrow{\mathrm{N}_0}$ i $\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$ elementi trobrida pratioca u točki $\mathrm{T}_0=\left(x(0),y(0),z(0)\right)\in\mathcal{C}$.

✐ Podsjetimo se, u točki $\mathrm{T}_0=\left(x(0),y(0),z(0)\right)\in\mathcal{C}$ razlikujemo tri ravnine:

oskulacionu ravninu (razapetu vektorima $\overrightarrow{\mathrm{T}_0}$ i $\overrightarrow{\mathrm{N}_0}$),

normalnu ravninu (razapetu vektorima $\overrightarrow{\mathrm{N}_0}$ i $\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$),

rektifikacionu ravninu (razapetu vektorima $\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$ i $\overrightarrow{\mathrm{T}_0}$).

Pretpostavimo da je $\vec{x}(0)=(0,0,0)$. Tada u okolini ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava je kanonski razvoj regularne prostorne krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}=\vec{x}(s)$ dan sa:

$$\begin{aligned}\vec{x}(s)=&\left[\frac{s}{1!}-\chi_0^2\cdot\frac{s^3}{3!}-3\chi_0\cdot\dot{\chi}_0\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\right]\cdot\overrightarrow{\mathrm{T}_0}\\&+\left[\chi_0\cdot\frac{s^2}{2!}+\dot{\chi}_0\cdot\frac{s^3}{3!}+\left(-\chi_0^3+\ddot{\chi}_0-\chi_0\cdot\tau_0^2\right)\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\right]\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}_0}\\&+\left[\chi_0\cdot\tau_0\cdot\frac{s^3}{3!}+\left(2\dot{\chi}_0\cdot\tau_0+\chi_0\cdot\dot{\tau}_0\right)\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\right]\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}_0}\,.\end{aligned}\tag{82}$$

Jasno, u ovom su slučaju $\overrightarrow{\mathrm{T}_0}$, $\overrightarrow{\mathrm{N}_0}$ i $\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$ elementi trobrida pratioca u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava (kojim prolazi krivulja $\mathcal{C}$).

Specijalno, ako je $\overrightarrow{\mathrm{T}_0}=\vec{i}$, $\overrightarrow{\mathrm{N}_0}=\vec{j}$, $\overrightarrow{\mathrm{B}_0}=\vec{k}$, onda iz (82) proizlazi da je <u>kanonski razvoj za koordinatne funkcije</u> (vektorske funkcije $\vec{x}(s)$) dan sa:

$$\left.\begin{aligned}x(s)&=\frac{s}{1!}-\chi_0^2\cdot\frac{s^3}{3!}-3\chi_0\cdot\dot{\chi}_0\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\\y(s)&=\chi_0\cdot\frac{s^2}{2!}+\dot{\chi}_0\cdot\frac{s^3}{3!}+\left(-\chi_0^3+\ddot{\chi}_0-\chi_0\cdot\tau_0^2\right)\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\\z(s)&=\chi_0\cdot\tau_0\cdot\frac{s^3}{3!}+\left(2\dot{\chi}_0\cdot\tau_0+\chi_0\cdot\dot{\tau}_0\right)\cdot\frac{s^4}{4!}+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{83}$$

Uzimajući u obzir da je za ispitivanje ponašanja krivulje u okolini bilo koje njene točke dovoljno uzeti samo prve članove kanonskog razvoja, zaključujemo da za dovoljno mali s (tj. kad $s \to 0$) iz kanonskog razvoja (83) proizlazi:

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= s \\ y(s) &= \frac{\chi_0}{2} \cdot s^2 \\ z(s) &= \frac{\chi_0 \cdot \tau_0}{6} \cdot s^3 \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

što povlači da se regularna krivulja $\mathcal{C}$ ... $\vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k}$, $s \in [0, \mathrm{L}]$ u okolini ishodišta pravokutnog koordinatnog sustava može aproksimirati sljedećom krivuljom

$$\mathcal{C}' \ \ldots \ \vec{x}(s) = s\,\vec{i} + \frac{\chi_0}{2} \cdot s^2 \vec{j} + \frac{\chi_0 \cdot \tau_0}{6} \cdot s^3 \vec{k}\,. \tag{85}$$

Pritom je $\chi_0 \neq 0$ fleksija i τ_0 torzija krivulje $\mathcal{C}'$ i jasno krivulje $\mathcal{C}$ u ishodištu (pravokutnog koordinatnog sustava).

Uočimo da $\chi_0 \neq 0$ proizlazi iz pretpostavke da krivulja $\mathcal{C}$ nema nijednu točku izravnavanja. S druge strane τ_0 može, ali ne mora biti različita od nule. Jasno, ako je $\tau_0 \neq 0$, onda je sa (85) dana vektorska jednadžba prostorne krivulje $\mathcal{C}'$, a specijalno za $\tau_0 = 0$ dobivamo da se $\mathcal{C}'$ „degenerira“ na ravninsku krivulju $\mathcal{C}'$ kojoj je $\vec{x}(s) = s\,\vec{i} + \frac{\chi_0}{2} \cdot s^2 \vec{j}$ vektorska jednadžba.

✎ Uočimo da iz pretpostavke $\overrightarrow{\mathrm{T}_0} = \vec{i}$, $\overrightarrow{\mathrm{N}_0} = \vec{j}$, $\overrightarrow{\mathrm{B}_0} = \vec{k}$ proizlazi da su elementi baze $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ prostora $\mathbb{R}^3$ ujedno i elementi trobrida pratioca krivulje $\mathcal{C}'$ u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava.

Time je u ishodištu $xy-$ravnina ujedno i oskulaciona ravnina krivulje $\mathcal{C}'$ i analogno $yz-$ravnina je normalna, a $xz-$ravnina je rektifikacionu ravnina krivulje $\mathcal{C}'$.

Projicirajmo sada krivulju (85) redom na sve tri ravnine. Projekcijom krivulje $\mathcal{C}'$ na oskulacionu ravninu proizlazi da je: $x(s) = s$, $y(s) = \frac{\chi_0}{2} \cdot s^2$, $z(s) = 0$.

Eliminacijom parametra s iz jednadžbi $x = s$, $y = \frac{\chi_0}{2} \cdot s^2$ dobivamo jednadžbu parabole

$$\boxed{y = \frac{\chi_0}{2} \cdot x^2}\,.$$

Analogno, projekcijom krivulje $\mathcal{C}'$ na normalnu ravninu proizlazi da je:

$$x(s)=0,\quad y(s)=\frac{\chi_0}{2}\cdot s^2,\quad z(s)=\frac{\chi_0\cdot\tau_0}{6}\cdot s^3$$

pa se eliminacijom parametra s iz jednadžbi $y=\frac{\chi_0}{2}\cdot s^2$, $z=\frac{\chi_0\cdot\tau_0}{6}\cdot s^3$ dobiva semikubna parabola

$$\boxed{z^2=\frac{2\tau_0^2}{9\chi_0}\cdot y^3},$$

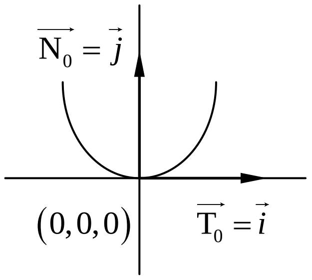
a projekcijom krivulje $\mathcal{C}'$ na rektifikacionu ravninu: $x(s)=s$, $y(s)=0$, $z(s)=\frac{\chi_0\cdot\tau_0}{6}\cdot s^3$

i eliminacijom parametra s dobiva se kubna parabola $\boxed{z=\frac{\chi_0\cdot\tau_0}{6}\cdot x^3}$.

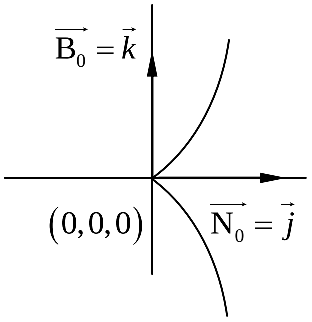
Interpretacija:

projekcija krivulje $\mathcal{C}'$ (a time i krivulje $\mathcal{C}$) u okolini ishodišta pravokutnog koordinatnog sustava ima približno oblik

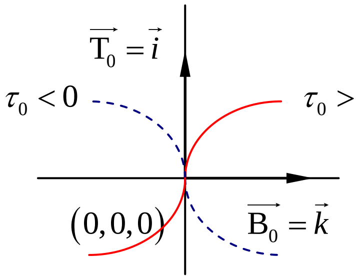
- parabole u oskulacionoj ravnini (slika 16.a),
- semikubne parabole u normalnoj ravnini (slika 16.b) i
- kubne parabole u rektifikacionoj ravnini (slika 16.c).



slika 16.a



slika 16.b



slika 16.c

Primijetimo da iz kanonskog razvoja (84) proizlazi $s=x$, $y=\frac{\chi_0\, x^2}{2}$, $z=\frac{\chi_0\cdot\tau_0\, x^3}{6}$ pa se fleksija i torzija u ishodištu mogu računati po formulama:

$$\chi_0=\lim_{x\to 0}\frac{2y}{x^2},\qquad \tau_0=\lim_{x\to 0}\frac{3z}{xy}.$$

Pritom smo koristili svojstvo da: $s\to 0$ povlači: $x\to 0$.

Uočimo, ako $s\to 0$, onda i $y\to 0$, međutim taj uvjet je nepotrebno pisati u limesu torzije τ_0 zbog produkta xy u nazivniku i uvjeta da $x\to 0$.

✐ Specijalno, ako je $\tau_0 = 0$, onda primjenom korolara 2.6.3 i 2.6.4 imamo da se krivulja $\mathcal{C}'$ u okolini ishodišta ponaša kao ravninska krivulja: $\mathcal{C}'$ ... $\vec{x}(s) = s\vec{i} + \frac{\chi_0}{2} \cdot s^2 \vec{j}$ koja ujedno „leži“ u svojoj oskulacionoj ravnini.

Lako se vidi da eliminacijom parametra s iz parametarskih jednadžbi $x = s$, $y = \frac{\chi_0}{2} \cdot s^2$ krivulje $\mathcal{C}'$ dobivamo jednadžbu parabole: $y = \frac{\chi_0}{2} \cdot x^2$.

Zaključujemo da ravninska krivulja $\mathcal{C}'$ u okolini ishodišta ima približno oblik parabole (slika 16.a).

Jasno, iz $y = \frac{\chi_0}{2} \cdot x^2$ direktno slijedi da se fleksija u ishodištu može izračunati formulom:

$$\chi_0 = \lim_{x \to 0} \frac{2y}{x^2}.$$