3. Regularne plohe u prostoru $\mathbb{R}^3$

U ovom poglavlju definirati ćemo pojam regularne plohe u prostoru $\mathbb{R}^3$, koju ćemo označavati sa M. U nastavku ćemo proučavati geometrijska svojstva regularne plohe. Ponekad ćemo regularnu plohu M zvati kraće ploha M.

3.1 Regularna parametrizacija plohe. Tangencijalna ravnina

Prije nego li definiramo regularnu parametrizaciju plohe, podsjetimo se pojma otvorenog skupa u ravnini $\mathbb{R}^2$.

- Kažemo da je podskup $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ <u>otvoren</u> ako za svaku točku $(a,b) \in \mathrm{U}$ postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da za bilo koji $(x,y) \in \mathrm{U}$ vrijedi: $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2$.

Drugim rječima, za podskup $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je otvoren ako svaka točka $(a,b) \in \mathrm{U}$ ima kružnu okolinu koja je sadržana u U.

Primjeri

a) $\mathrm{U}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ je otvoren skup,

b) $\mathrm{U}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ nije otvoren skup,

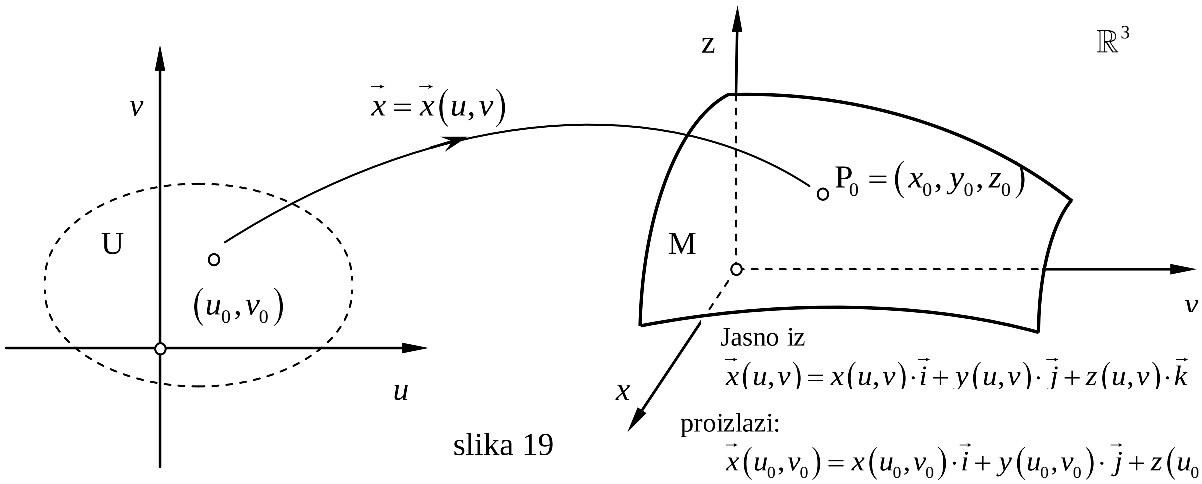
c) $\mathrm{U}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ je otvoren skup,

d) $\mathrm{U}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2,\ \ 3 < y < 5\}$ je otvoren skup,

Definicija 3.1.1

Regularna parametrizacija plohe $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^3$ je glatko preslikavanje $\vec{x} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in \mathrm{U}$ nekog nepraznog otvorenog podskupa $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ (gdje je $\mathbb{R}^2$ uv - ravnina) u prostor $\mathbb{R}^3$ takvo da je:

$$\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v) \neq \vec{0} \qquad \text{za svaki } (u,v) \in \mathrm{U}.$$



slika 19

Jasno iz
$\vec{x}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k}$
proizlazi:
$\vec{x}(u_0,v_0) = x(u_0,v_0)\cdot\vec{i} + y(u_0,v_0)\cdot\vec{j} + z(u_0,v_0)\cdot\vec{k}$
odnosno $\vec{x}(u_0,v_0) = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$

Pritom je $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$ opći zapis vektorske jednadžbe regularne plohe M u prostoru $\mathbb{R}^3$.

- Uzimajući u obzir $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, imamo da se vektorska funkcija $\vec{x} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in \mathrm{U}$ zadaje sa tri skalarne funkcije $x(u,v)$, $y(u,v)$ i $z(u,v)$ (po dvjema varijablama u i v) izrazom:

$$\vec{x}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k} \tag{89}$$

koji nazivamo *vektorskom jednadžbom regularne plohe* M prostoru $\mathbb{R}^3$.

Iz izraza (89) proizlazi da su *parametarske jednadžbe regularne plohe* M prostoru $\mathbb{R}^3$ dane sa:

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v) \tag{90}$$

za svaki $(u,v) \in \mathrm{U}$.
Ponovimo, za vektorsku funkciju zadanu vektorskom jednadžbom (89) se uvjet regularnosti izražava uvjetom:

$$\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v) \neq \vec{0} \quad \text{ili ekvivalentno} \quad \left|\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v)\right| \neq 0 \quad \text{za svaki } (u,v) \in \mathrm{U}.$$

Pritom se uvjetom regularnosti podrazumijeva da je u svakoj točki regularne plohe $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^3$ definirana tangencijalna ravnina (vidi definiciju 3.1.4).

Često ćemo koristiti svojstvo poistovjećivanja vektorske funkcije (89) sa uređenom trojkom pripadnih skalarnih funkcija $x(u,v)$, $y(u,v)$ i $z(u,v)$ te ćemo podrazumijevati da je:

$$x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k} = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big).$$

Nadalje, vektorskom jednadžbom (89) je svakoj točki (u,v) iz nepraznog otvorenog podskupa $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ jednoznačno pridružena točka $\mathrm{P} = (x,y,z)$ na plohi M, pri čemu su x, y i z dani parametarskim jednadžbama (90) - vidi sliku 19.

Komentar 3.1.2

Promatrajmo sada uvjet regularnosti plohe M

$\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v) \neq \vec{0}$, koji ćemo skraćeno pisati $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$ za svaki $(u,v) \in \mathrm{U}$.

Pritom su parcijalne derivacije vektorske funkcije $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$ plohe M, dane sa:

$$\vec{x}_u = \vec{x}_u(u,v) = x_u(u,v)\cdot\vec{i} + y_u(u,v)\cdot\vec{j} + z_u(u,v)\cdot\vec{k} = x_u\cdot\vec{i} + y_u\cdot\vec{j} + z_u\cdot\vec{k},$$

$$\vec{x}_v = \vec{x}_v(u,v) = x_v(u,v)\cdot\vec{i} + y_v(u,v)\cdot\vec{j} + z_v(u,v)\cdot\vec{k} = x_v\cdot\vec{i} + y_v\cdot\vec{j} + z_v\cdot\vec{k}.$$

Uzimajući u obzir da je

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (y_u z_v - z_u y_v)\cdot\vec{i} + (z_u x_v - x_u z_v)\cdot\vec{j} + (x_u y_v - y_u x_v)\cdot\vec{k}$$

ili

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}\cdot\vec{i} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

dobivamo da je $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$ ako i samo ako je $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq \vec{0}$, odnosno ako je barem jedna minora drugog reda različita od nule, što se iskazuje uvjetom da je rang matrice $\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$ jednak 2 i pišemo:

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{rang}\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2 .$$

Podsjetimo se, rang matrice je jednak redu najveće minore različite od nule, stoga je rang matrice jednak 2 ako i samo ako postoji barem jedna minora drugog reda (tj. minora formata 2×2) različita od nule.

Komentar 3.1.3

Neka je $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ neprazni otvoreni podskup uv- ravnine i neka je $\vec{x}:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija plohe M u $\mathbb{R}^3$ zadana vektorskom jednadžbom:

$$\mathrm{M} \ldots\ \vec{x}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k}$$

za svaki $(u,v)\in\mathrm{U}$, gdje je $\vec{x}_u(u,v)\times\vec{x}_v(u,v)\neq\vec{0}$.

Varijable u i v zovemo *parametrima*, a uv-ravninu *parametarskom ravninom*. Uočimo sljedeće:

- ako parametar v fiksiramo, tj. za $v=v_0$, gdje je $v_0 = konst.$ (fiksiran realan broj), onda iz vektorske jednadžbe plohe M proizlazi vektorska jednadžba krivulje:

$$\mathcal{C}_u \ \ldots\ \vec{\alpha}(u) = \vec{x}(u,v_0) = x(u,v_0)\cdot\vec{i} + y(u,v_0)\cdot\vec{j} + z(u,v_0)\cdot\vec{k} = \big(x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)\big),$$

koju nazivamo u - krivuljom i analogno

- ako parametar u fiksiramo, tj. za $u=u_0$, gdje je $u_0 = konst.$ (fiksiran realan broj), onda iz vektorske jednadžbe plohe M proizlazi vektorska jednadžba krivulje:

$$\mathcal{C}_v \ \ldots\ \vec{\beta}(v) = \vec{x}(u_0,v) = x(u_0,v)\cdot\vec{i} + y(u_0,v)\cdot\vec{j} + z(u_0,v)\cdot\vec{k} = \big(x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v)\big),$$

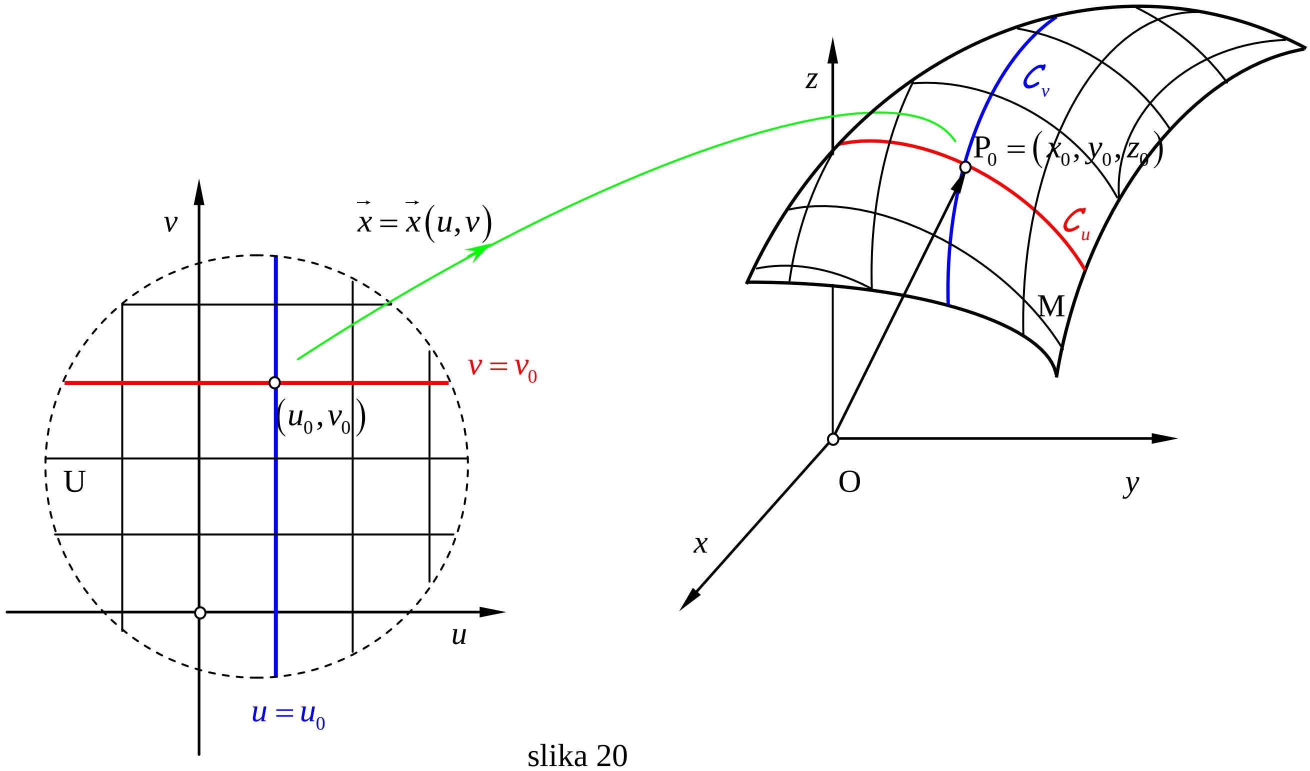
koju nazivamo v - krivuljom;

ako su parametri u i v istovremeno fiksirani, tj. za $u=u_0$ i $v=v_0$, gdje je $u_0=konst.$, $v_0=konst.$, onda iz vektorske jednadžbe plohe M dobivamo radij-vektor:

$$\vec{x}(u_0,v_0)=x(u_0,v_0)\cdot\vec{i}+y(u_0,v_0)\cdot\vec{j}+z(u_0,v_0)\cdot\vec{k},$$

koji je jednoznačno pridružen točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ plohe M, pri čemu je:

$$x_0=x(u_0,v_0),\quad y_0=y(u_0,v_0),\quad z_0=z(u_0,v_0).$$



slika 20

Drugim riječima, ako je točki (u_0,v_0) iz nekog nepraznog otvorenog podskupa $\mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ pridružena neka točka $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ plohe M , onda se za varijabilan parametar u i fiksirani parametar $v=v_0$ dobiva u - krivulja $\mathcal{C}_u$ na plohi M i analogno se za fiksirani parametar $u=u_0$ i varijabilni parametar v dobiva v - krivulja $\mathcal{C}_v$ na plohi M. Pritom je $\mathcal{C}_u\cap\mathcal{C}_v=\mathrm{P}_0$ (vidi sliku 20).

Krivulje $\mathcal{C}_u$ i $\mathcal{C}_v$ nazivamo *parametarskim (ili koordinatnim) krivuljama* na plohi M ili kraće u - krivuljom, odnosno v - krivuljom.

Budući da $u_0=konst.$ i $v_0=konst.$ mogu poprimiti različite (konstantne) realne vrijednosti, imamo da će ploha M biti prekrivena s dva jednoparametarska skupa krivulja (tj. dvije familije $\mathcal{C}_u$ i $\mathcal{C}_v$ krivulja), koje na plohi M tvore **parametarsku ili koordinatnu mrežu**.

Vratimo se na vektorsku jednadžbu regularne plohe:

$$\mathrm{M} \ldots \;\; \vec{x}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k},$$

gdje je $\vec{x}_u(u,v)\times\vec{x}_v(u,v)\neq\vec{0}$ za svaki $(u,v)\in\mathrm{U}$.

Pritom je $\vec{x}:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija plohe $\mathrm{M}\subset\mathbb{R}^3$, gdje je U neprazni otvoreni podskup uv-ravnine.

Parcijalne derivacije (prvog reda) vektorske funkcije $\vec{x}:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^3$, $\vec{x}=\vec{x}(u,v)$, $(u,v)\in\mathrm{U}$ su također vektorske funkcije, koje su definirane sa:

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_u(u,v) &= x_u(u,v)\cdot\vec{i} + y_u(u,v)\cdot\vec{j} + z_u(u,v)\cdot\vec{k} \\ \vec{x}_v(u,v) &= x_v(u,v)\cdot\vec{i} + y_v(u,v)\cdot\vec{j} + z_v(u,v)\cdot\vec{k} \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Neka su parametri u i v istovremeno fiksirani, tj. neka je $u=u_0$ i $v=v_0$, $u_0, v_0\in\mathbb{R}$.

Tada iz izraza (91) dobivamo vektore: $\vec{x}_u(u_0,v_0)=\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)$ i $\vec{x}_v(u_0,v_0)=\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)$.

S druge strane promatrajmo vektorske jednadžbe parametarskih krivulja $\mathcal{C}_u$ i $\mathcal{C}_v$ na plohi M:

$$\mathcal{C}_u \;\ldots\;\; \vec{\alpha}(u)=\vec{x}(u,v_0)\;\; \left(=x(u,v_0)\cdot\vec{i}+y(u,v_0)\cdot\vec{j}+z(u,v_0)\cdot\vec{k}\right),$$

$$\mathcal{C}_v \;\ldots\;\; \vec{\beta}(v)=\vec{x}(u_0,v)\;\; \left(=x(u_0,v)\cdot\vec{i}+y(u_0,v)\cdot\vec{j}+z(u_0,v)\cdot\vec{k}\right),$$

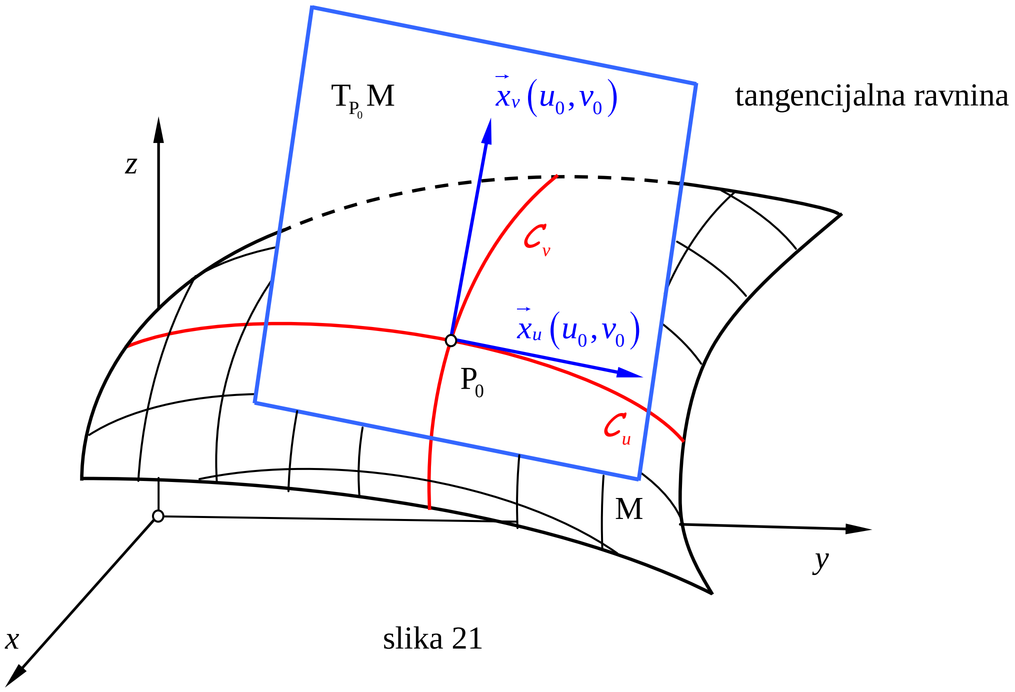
gdje je $\mathrm{P}_0=\mathcal{C}_u\cap\mathcal{C}_v$, $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathrm{M}$. Tada je

$\vec{\alpha}\,'(u_0)=\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u_0,v_0)=\vec{x}_u(u_0,v_0)$ vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}_u$ u točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$,

$\vec{\beta}\,'(v_0)=\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u_0,v_0)=\vec{x}_v(u_0,v_0)$ vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}_v$ u točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$.

Lako se vidi da se vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}_u$ u točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ dobiva iz parcijalne derivacije vektorske jednadžbe plohe po parametru "u" u točki (u_0,v_0) i analogno da se vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}_v$ u (istoj) točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ dobiva iz parcijalne derivacije vektorske jednadžbe plohe po parametru "v" u točki (u_0,v_0).

- Iz uvjeta regularnosti plohe proizlazi: $\vec{x}_u(u_0,v_0)\times\vec{x}_v(u_0,v_0)\neq\vec{0}$, što se interpretira da su vektori $\vec{x}_u(u_0,v_0)$ i $\vec{x}_v(u_0,v_0)$ linearno nezavisni u točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ na plohi M pa oni u točki P_0 razapinju ravninu, koju ćemo nazvati tangencijalnom ravninom (slika 21).



slika 21

Definicija 3.1.4

Neka je $\vec{x}: \mathrm{U} \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija plohe M u $\mathbb{R}^3$ dana sa:

$$\mathrm{M} \ldots \ \vec{x}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k},$$

$\vec{x}_u(u,v)\times\vec{x}_v(u,v)\neq\vec{0}$ za svaki $(u,v)\in\mathrm{U}$ i neka je $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathrm{M}$.

$$\left(\text{Jasno:} \quad x_0 = x(u_0,v_0), \quad y_0 = y(u_0,v_0), \quad z_0 = z(u_0,v_0)\right).$$

Tada vektori $\vec{x}_u(u_0,v_0)$ i $\vec{x}_v(u_0,v_0)$ u točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ plohe M razapinju **tangencijalnu ravninu**, koju ćemo označavati sa $\mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$.

✎ Primijetimo da su u točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathrm{M}$ jednoznačno određena dva međusobno suprotna vektora $\vec{x}_u(u_0,v_0)\times\vec{x}_v(u_0,v_0)$ i $\vec{x}_v(u_0,v_0)\times\vec{x}_u(u_0,v_0)$ (različita od nul-vektora) koji su ujedno ortogonalni na tangencijalnu ravninu $\mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$ u točki P_0.

Definicija 3.1.5

U točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ na plohi M definira se **jedinični vektor plošne normale** (ili jedinična normala regularne plohe) izrazom:

$$\vec{n}(u_0,v_0) = \frac{\vec{x}_u(u_0,v_0)\times\vec{x}_v(u_0,v_0)}{\left|\vec{x}_u(u_0,v_0)\times\vec{x}_v(u_0,v_0)\right|},$$

gdje je $\vec{n}(u_0,v_0)\perp\mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$ (vidi sliku 22).

Neka je $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ radij-vektor bilo koje točke (x, y, z) u tangencijalnoj ravnini $\mathrm{T_{P_0}M}$. Tada je <u>jednadžba tangencijalne ravnine</u> u točki $\mathrm{P_0} = (x_0, y_0, z_0)$ na plohi M dana sa:

$$\boxed{\left(\vec{R} - \vec{x}(u_0, v_0)\right) \cdot \vec{n}(u_0, v_0) = 0} \tag{92}$$

odakle proizlazi:

$$\left(\vec{R} - \vec{x}(u_0, v_0)\right) \cdot \frac{\vec{x}_u(u_0, v_0) \times \vec{x}_v(u_0, v_0)}{\left|\vec{x}_u(u_0, v_0) \times \vec{x}_v(u_0, v_0)\right|} = 0$$

odnosno

$$\left(\vec{R} - \vec{x}(u_0, v_0)\right) \cdot \left(\vec{x}_u(u_0, v_0) \times \vec{x}_v(u_0, v_0)\right) = 0$$

ili

$$\boxed{\left(\vec{R} - \vec{x}(u_0, v_0), \vec{x}_u(u_0, v_0), \vec{x}_v(u_0, v_0)\right) = 0}\ . \tag{93}$$

Koristeći svojstvo mješovitog produkta vektora dobivamo da se jednadžba tangencijalne ravnine (93) u točki $\mathrm{P_0} = (x_0, y_0, z_0)$ plohe M može pisati u obliku:

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{94}$$

<u>*Napomena*</u>:

Iz svojstva regularnosti plohe $\mathrm{M} \ldots\ \vec{x}(u,v) = x(u,v) \cdot \vec{i} + y(u,v) \cdot \vec{j} + z(u,v) \cdot \vec{k}$
proizlazi da se u svakoj točki $\mathrm{P} = \vec{x}(u,v)$ plohe M može postaviti tangencijalna ravnina $\mathrm{T_P M}$.
Dakle treba razlikovati oznake $\mathrm{T_P M}$ od $\mathrm{T_{P_0} M}$.
Naime, $\mathrm{T_P M}$ označava tangencijalnu ravninu u bilo kojoj točki $\mathrm{P} = \vec{x}(u,v)$ plohe M, dok $\mathrm{T_{P_0} M}$ označava tangencijalnu ravninu u nekoj fiksnoj točki $\mathrm{P_0} = \vec{x}(u_0, v_0)$ plohe M. Jasno, koordinate točke P su skalarne funkcije dane jednadžbama (90), a koordinate točke $\mathrm{P_0}$ su realni brojevi.

Promatrajmo sada bilo koju krivulju na plohi M koja prolazi točkom $\mathrm{P_0} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{M}$.

Ako parametre u i v proglasimo skalarnim funkcijama po nekoj varijabli t, onda se iz vektorske jednadžbe regularne plohe M dobiva vektorska jednadžba regularne krivulje $\mathcal{C}$, koja leži na plohi M. Jasno, ako je ploha M regularna, onda će i bilo koja krivulja na toj plohi biti regularna (što se interpretira da je u svakoj točki te krivulje jednoznačno određen jedinični vektor tangente).

Dakle, neka je: $\mathrm{M} \ldots\ \vec{x}(u,v) = x(u,v) \cdot \vec{i} + y(u,v) \cdot \vec{j} + z(u,v) \cdot \vec{k}$, $\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v) \neq \vec{0}$ za svaki $(u,v) \in \mathrm{U}$ i neka je: $u = u(t)$, $v = v(t)$. Tada na plohi M dobivamo (regularnu) krivulju:

$$\mathcal{C} \ \ldots\ \ \vec{\gamma}(t) = \vec{x}(u(t), v(t)). \tag{95}$$

Uočimo da se identitetom (95) podrazumijeva da je

$$x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}=x\big(u(t),v(t)\big)\cdot\vec{i}+y\big(u(t),v(t)\big)\cdot\vec{j}+z\big(u(t),v(t)\big)\cdot\vec{k}$$

Neka je $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ neka fiksna točka na plohi M

$$\big(\text{tj,}\quad x_0=x(u_0,v_0),\quad y_0=y(u_0,v_0),\quad z_0=z(u_0,v_0)\big).$$

Tada krivulja $\mathcal{C}$ prolazi točkom $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ plohe M (ili analogno točka P_0 leži na krivulji $\mathcal{C}$) ako postoji $t_0\in\mathbb{R}$ takav da vrijedi: $\mathrm{P}_0=\vec{\gamma}(t_0)=\vec{x}\big(u(t_0),v(t_0)\big)$, gdje je $u(t_0)=u_0$ i $v(t_0)=v_0$.
Uočimo da iz gore navedenog proizlaze sljedeći identiteti:

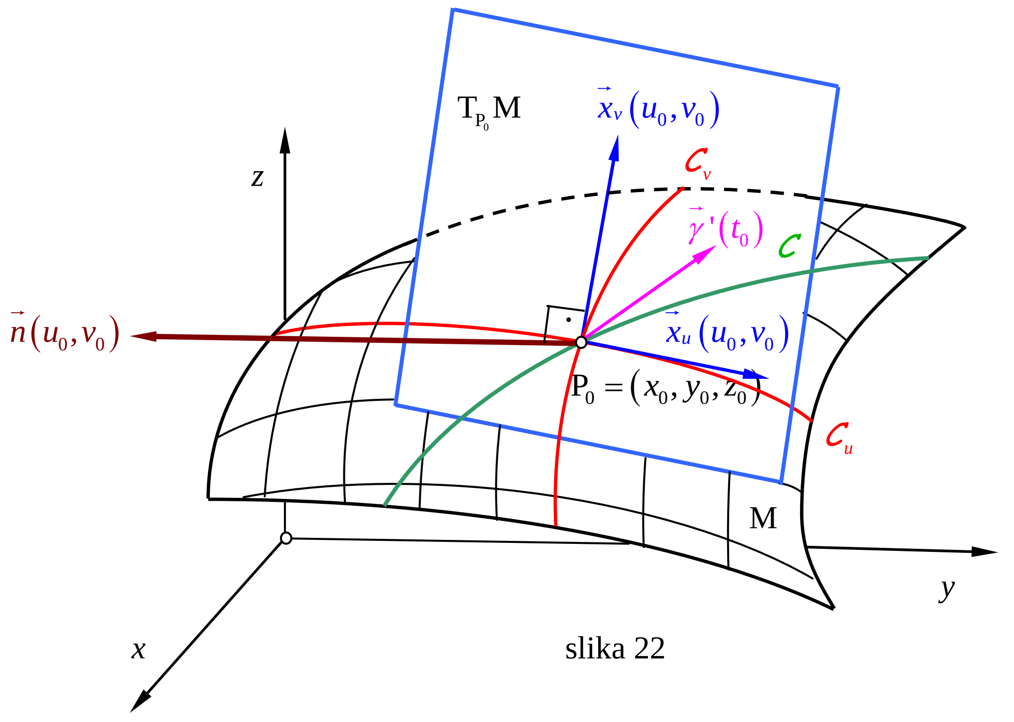
$$x_0=x(t_0)=x\big(u(t_0),v(t_0)\big)=x(u_0,v_0),$$
$$y_0=y(t_0)=y\big(u(t_0),v(t_0)\big)=y(u_0,v_0),$$
$$z_0=z(t_0)=z\big(u(t_0),v(t_0)\big)=z(u_0,v_0).$$

Deriviranjem identiteta (95) po parametru t (pri čemu se koristi svojstvo derivacije kompozicije funkcija) dobivamo:

$$\boxed{\vec{\gamma}\,'(t)=\vec{x}_u\big(u(t),v(t)\big)\cdot u'(t)+\vec{x}_v\big(u(t),v(t)\big)\cdot v'(t)} \tag{96}$$

i specijalno za $t=t_0$ (gdje je t_0 neki fiksni parametar):

$$\boxed{\vec{\gamma}\,'(t_0)=\vec{x}_u(u_0,v_0)\cdot u'(t_0)+\vec{x}_v(u_0,v_0)\cdot v'(t_0)}\,. \tag{97}$$



slika 22

Komentar 3.1.6

Vektorska funkcija $\vec{\gamma}'(t)$, dana izrazom (96), interpretira se kao vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}$ u bilo kojoj njenoj točki. Vektor $\vec{\gamma}'(t_0)$, dan izrazom (97), predočuje vektor tangente na krivulju $\mathcal{C}$ u fiksnoj točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ krivulje $\mathcal{C}$.

Dakle, treba razlikovati vektorsku funkciju $\vec{\gamma}'(t)$ od vektora $\vec{\gamma}'(t_0)$.

Izrazom (97) dan je prikaz vektora $\vec{\gamma}'(t_0)$ kao linearne kombinacije vektora (tangenti) $\vec{x}_u(u_0,v_0)$ i $\vec{x}_v(u_0,v_0)$ na pripadne parametarske $\mathcal{C}_u$ i $\mathcal{C}_v$ krivulje u fiksnoj točki $\mathrm{P}_0=\mathcal{C}_u\cap\mathcal{C}_u$. Uzimajući u obzir da vektori $\vec{x}_u(u_0,v_0)$ i $\vec{x}_v(u_0,v_0)$ razapinju tangencijalnu ravninu $\mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$ u fiksnoj točki P_0 plohe M zaključujemo da:

- vektor tangente $\vec{\gamma}'(t_0)$ na krivulju $\mathcal{C}$ u točki $\mathrm{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ mora ležati u tangencijalnoj ravnini $\mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$ $\big($razapetoj vektorima $\vec{x}_u(u_0,v_0)$ i $\vec{x}_v(u_0,v_0)\big)$.

Poopćenje ovog rezultata direktno proizlazi iz izraza (96), kojim se vektorska funkcija $\vec{\gamma}'(t)$ prikazuje kao linearna kombinacija vektorskih funkcija $\vec{x}_u(u(t),v(t))$ i $\vec{x}_v(u(t),v(t))$ po nekom proizvoljnom parametru t. Pritom $\vec{x}_u(u(t),v(t))$ i $\vec{x}_v(u(t),v(t))$ razapinju tangencijalnu ravninu $\mathrm{T}_\mathrm{P}\mathrm{M}$ u bilo kojoj točki $\mathrm{P}=\vec{x}(u,v)$ (regularne) plohe M. Jasno, u izrazu (96) su $u'(t)$ i $v'(t)$ skalarne funkcije po parametru t.

Uzimajući u obzir definiciju derivacije funkcije jedne varijable, imamo da je:

$$\vec{\gamma}'(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}(t)}{\mathrm{d}t},\qquad u'(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t},\qquad v'(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

pa se izraz (96) može pisati u obliku:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}(t)}{\mathrm{d}t}=\vec{x}_u(u(t),v(t))\cdot\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\vec{x}_v(u(t),v(t))\cdot\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\Big/\cdot\,\mathrm{d}t\,,$$

odakle (množeći sa diferencijalom $\mathrm{d}t$) proizlazi

$$\mathrm{d}\vec{\gamma}(t)=\vec{x}_u(u(t),v(t))\cdot\mathrm{d}u(t)+\vec{x}_v(u(t),v(t))\cdot\mathrm{d}v(t)$$

čime dobivamo da je $\mathrm{d}\vec{\gamma}(t)$ **totalni diferencijal 1. reda vektorske funkcije** $\vec{x}=\vec{x}(u,v)$.