3.2 Primjeri ploha: sfera, torus, pravčaste plohe, rotacione plohe

Sfera

Podsjetimo se, sa $x^2+y^2+z^2=r^2$ je dana implicitna jednadžba sfere polumjera $r>0$ sa središtem u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava prostora $\mathbb{R}^3$.

Postavlja se pitanje, da li je moguće "prijeći" sa implicitne jednadžbe sfere na vektorsku jednadžbu sfere i koje se sve vektorske jednadžbe dobivaju te što one opisuju?

Primijetimo da iz dane implicitne jednadžbe sfere proizlaze sljedeće eksplicitne jednadžbe:

$$z=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,,\qquad y=\pm\sqrt{r^2-x^2-z^2}\,,\qquad x=\pm\sqrt{r^2-y^2-z^2}\,.$$

iz kojih uz podesne supstitucije dobivamo sljedeće vektorske jednadžbe:

$$\vec{x}_1(u,v)=u\cdot\vec{i}+v\cdot\vec{j}+\sqrt{r^2-u^2-v^2}\cdot\vec{k}=\left(u,v,\sqrt{r^2-u^2-v^2}\right)\qquad\text{(gornja polusfera)}$$

$$\vec{x}_2(u,v)=u\cdot\vec{i}+v\cdot\vec{j}-\sqrt{r^2-u^2-v^2}\cdot\vec{k}=\left(u,v,-\sqrt{r^2-u^2-v^2}\right)\qquad\text{(donja polusfera)}$$

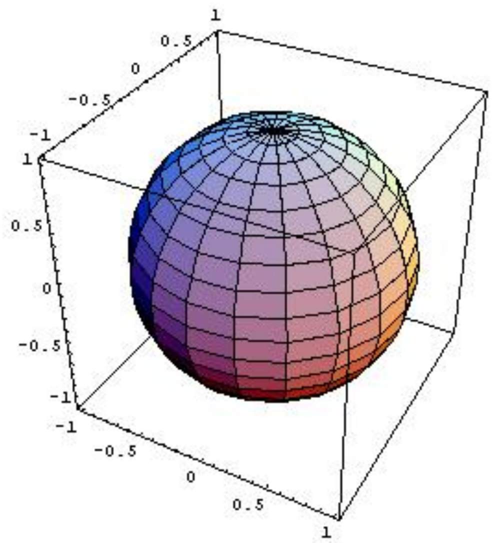
$$\vec{x}_3(u,v)=u\cdot\vec{i}+\sqrt{r^2-u^2-v^2}\cdot\vec{j}+v\cdot\vec{k}=\left(u,\sqrt{r^2-u^2-v^2},v\right)\qquad\text{(desna polusfera)}$$

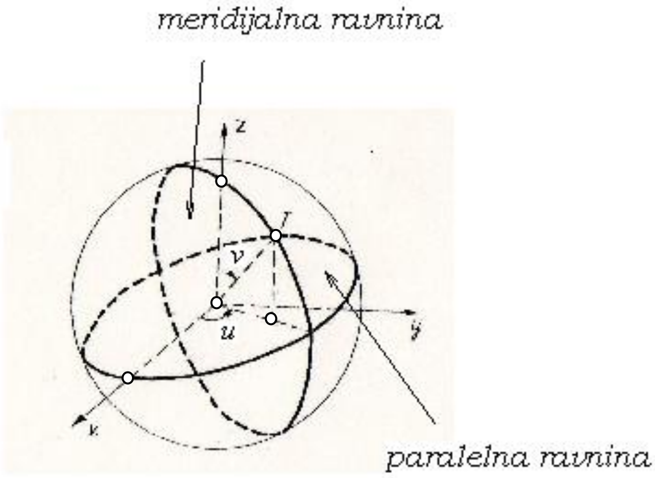
$$\vec{x}_4(u,v)=u\cdot\vec{i}-\sqrt{r^2-u^2-v^2}\cdot\vec{j}+v\cdot\vec{k}=\left(u,-\sqrt{r^2-x^2-y^2},v\right)\qquad\text{(lijeva polusfera)}$$

$$\vec{x}_5(u,v)=\sqrt{r^2-u^2-v^2}\cdot\vec{i}+u\cdot\vec{j}+v\cdot\vec{k}=\left(\sqrt{r^2-u^2-v^2},u,v\right)\qquad\text{(prednja polusfera)}$$

$$\vec{x}_6(u,v)=-\sqrt{r^2-u^2-v^2}\cdot\vec{i}+u\cdot\vec{j}+v\cdot\vec{k}=\left(-\sqrt{r^2-u^2-v^2},u,v\right)\qquad\text{(stražnja polusfera)}$$

Svaka od navedenih šest vektorskih jednadžbi predočuje po jednu otvorenu polusferu i one sve zajedno pokrivaju sferu. Svaka polusfera se naziva karta, a skup svih 6 karata naziva se atlas sfere.





Uobičajeno je da se sfera polumjera $r>0$ sa središtem u ishodištu zadaje sljedećom vektorskom jednadžbom:

$$\boxed{\vec{x}(u,v)=r\cos u\sin v\cdot\vec{i}+r\sin u\sin v\cdot\vec{j}+r\cos v\cdot\vec{k},\qquad u\in[0,2\pi],\ \ v\in\langle 0,\pi\rangle}\,.$$

Pritom je "u" kut kojeg meridijalna ravnina točke T zatvara sa xz-ravninom, a "v" je kut kojeg radij-vektor točke T zatvara sa jediničnim vektorom $\vec{k}$ (tj. z osi).

Jasno, pritom se uzima da je točka T varijabilna točka (tj. bila koja točka) na sferi $\vec{x}=\vec{x}(u,v)$, stoga je $\mathrm{T}=(r\cos u\sin v,\ r\sin u\sin v,\ r\cos v)$

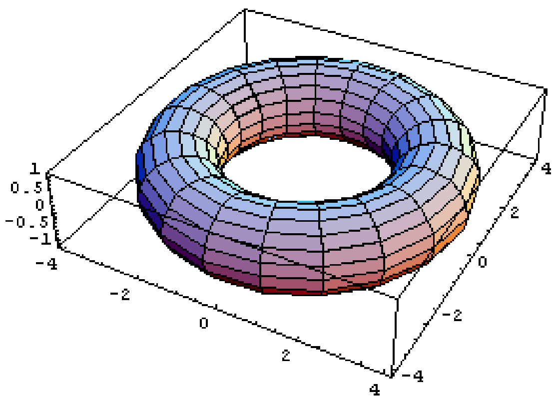
- Za vježbu, dokažite da je $\vec{x}(u,v)=r\cdot(\cos u\sin v,\sin u\sin v,\cos v)$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in\langle 0,\pi\rangle$ regularna parametrizacija sfere.

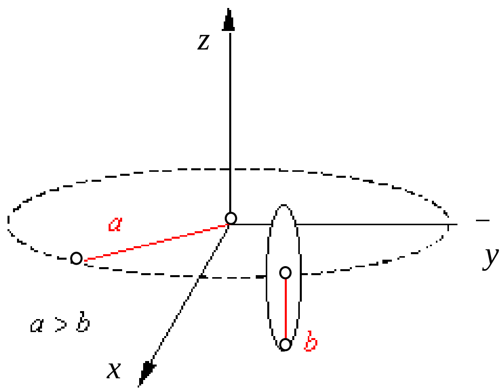
Torus

je ploha koja nastaje rotacijom kružnice polumjera $b>0$ oko kružnice polumjera $a>b$.
Pritom kružnica polumjera $a>0$ leži u ravnini ortogonalnoj s obzirom na kružnicu polumjera b.

Vektorska jednadžba torusa:

$$\boxed{\vec{x}(u,v)=\big((a+b\cos u)\cdot\cos v,(a+b\cos u)\cdot\sin v,b\sin u\big),\qquad u,v\in[0,2\pi],\ \ a>b>0}\,.$$





Pravčaste plohe

su one plohe koje možemo dobiti pomicanjem pravca duž neke krivulje.

Neka je $\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$, $\mathrm{I}\neq\varnothing$ neprazan interval u skupu realnih brojeva i neka je:

$\vec{\alpha}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$,
$\vec{\beta}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ proizvoljna vektorska funkcija takva da je $\vec{\beta}(u)\neq\vec{0}$ za svaki $u\in\mathrm{I}$.

Tada se definira regularna ploha: $\boxed{\vec{x}(u,v)=\vec{\alpha}(u)+v\cdot\vec{\beta}(u),\qquad u\in\mathrm{I},\ v\in\mathbb{R}}$,
koja se naziva **pravčasta ploha**.

Pritom se vektorska funkcija $\vec{\beta}(u) \neq \vec{0}$ naziva **izvodnica**, a krivulja $\mathcal{C}$, kojoj je $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(u)$ za svaki $u \in \mathrm{I}$ vektorska jednadžba, se naziva **ravnalica (ili direktrisa) pravčaste plohe**.

Primijetimo da iz uvjeta regularnosti krivulje $\mathcal{C} \ldots\ \vec{\alpha} = \vec{\alpha}(u)$ proizlazi:

$$\vec{\alpha}\,'(u) \neq \vec{0} \quad \text{za svaki } u \in \mathrm{I}.$$

S druge strane, pravčasta ploha, zadana sa: $\vec{x}(u,v) = \vec{\alpha}(u) + v \cdot \vec{\beta}(u), \quad u \in \mathrm{I},\ v \in \mathbb{R}$

je regularna ploha ako je $\quad \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \quad$ za svaki $u \in \mathrm{I},\ v \in \mathbb{R}$, stoga iz:

$$\vec{x}_u(u,v) = \vec{\alpha}\,'(u) + v \cdot \vec{\beta}\,'(u) \quad \text{i} \quad \vec{x}_v(u,v) = \vec{\beta}(u)$$

dobivamo:

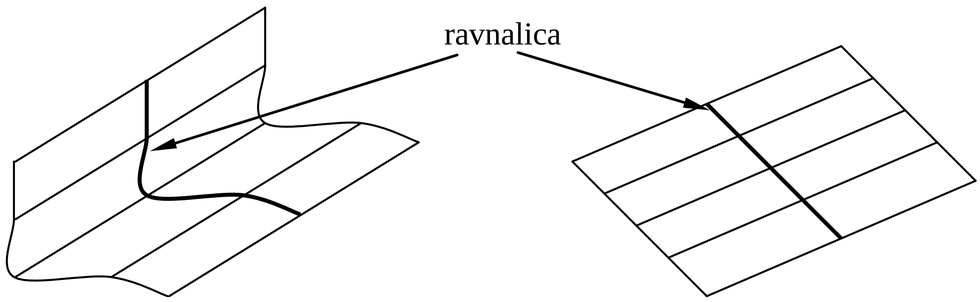
$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \Big(\underbrace{\vec{\alpha}\,'(u)}_{\neq \vec{0}} + v \cdot \vec{\beta}\,'(u)\Big) \times \underbrace{\vec{\beta}(u)}_{\neq \vec{0}} \neq \vec{0} \quad \text{za svaki } u \in \mathrm{I},\ v \in \mathbb{R},$$

što potvrđuje da su pravčaste plohe regularne plohe.

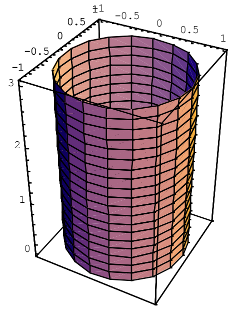
Primjeri pravčastih ploha

(1) Cilindrične (ili valjkaste plohe)

nastaju paralelnim pomakom pravca (izvodnice) duž neke krivulje $\mathcal{C}$ (ravnalice).



Najjednostavniji primjer cilindrične plohe je cilindar, koji je zadan vektorskom jednadžbom:



$$\boxed{\vec{x}(u,v) = (\cos u, \sin u, v), \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbb{R}}$$

Primijetimo:

$$\vec{x}(u,v) = (\cos u, \sin u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v \cdot (0,0,1)$$

odakle proizlazi $\quad \vec{x}(u,v) = \vec{\alpha}(u) + v \cdot \vec{\beta}(u)$

gdje je: $\quad \vec{\alpha}(u) = (\cos u, \sin u, 0), \quad \vec{\beta}(u) = (0,0,1).$

Time zaključujemo da je

(i) $\vec{\alpha}(u) = (\cos u, \sin u, 0),\ \ u \in [0, 2\pi]$ je vektorska <u>jednadžba ravnalice cilindara</u> <u>(k</u>oja je ujedno i vektorska jednadžba kružnice u xy- ravnini), stoga je kružnica <u>ravnalica</u> <u>cilindara;</u>

(ii) izvodnica cilindra $\vec{\beta}(u) = (0,0,1)$ je konstantan vektor (jedinični vektor $\vec{k}$), stoga iz $v \cdot \vec{\beta}(u) = (0,0,v)$ za svaki $v \in \mathbb{R}$ dobivamo skup svih točaka na osi z, tj. cijelu os z.

Na osnovu rečenog, imamo da se vektorska jednadžba cilindra može pisati u obliku:

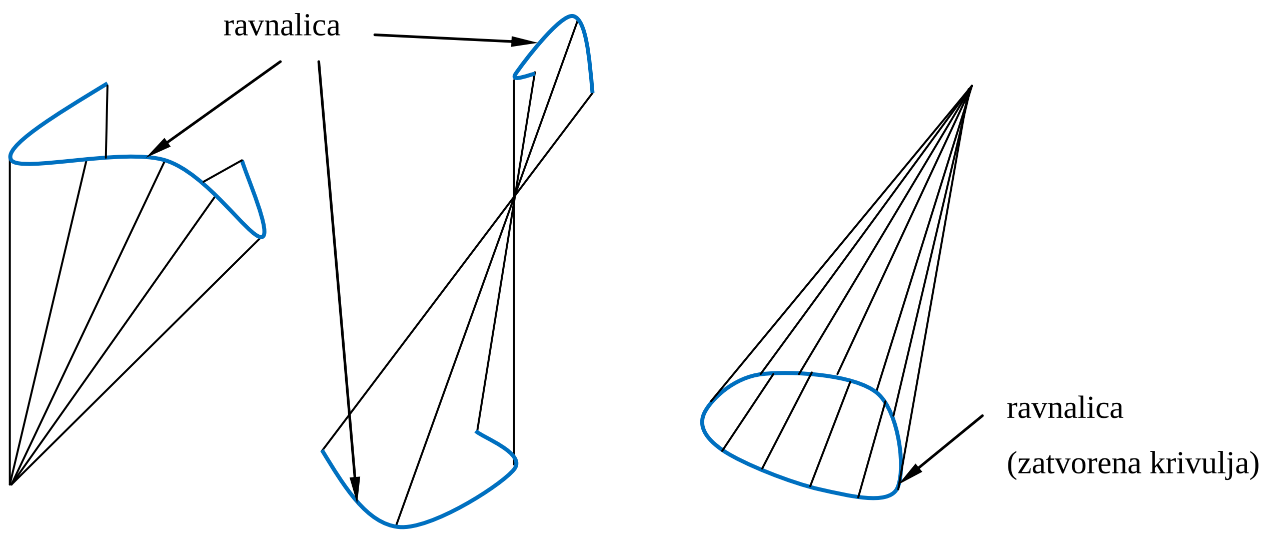
$$\vec{x}(u,v) = \vec{\alpha}(u) + v \cdot \vec{\beta}\ \ ,\quad u \in [0, 2\pi],\ \ v \in \mathbb{R}\ \text{, gdje je } \vec{\beta} \text{ konstantan vektor.}$$

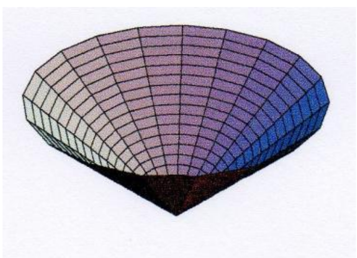
Pritom je:

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \left(\underbrace{\vec{\alpha}'(u)}_{\neq \vec{0}} + v \cdot \underbrace{\vec{\beta}'}_{=\vec{0}} \right) \times \underbrace{\vec{\beta}}_{\neq \vec{0}} = \vec{\alpha}'(u) \times \vec{\beta} \neq \vec{0} \qquad \text{za svaki } u \in [0, 2\pi],\ \ v \in \mathbb{R}.$$

(2) Čunjaste plohe

proizvodi pravac (izvodnica), koji prolazi nekom fiksiranom točkom i pomiče se duž krivulje $\mathcal{C}$ (ravnalice).





Primjer čunjaste plohe je konus koji je zadan sa:

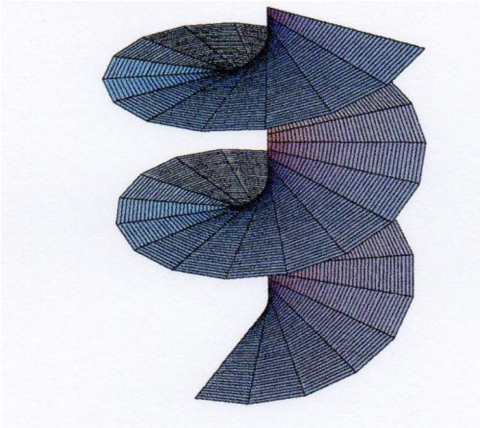
$$\boxed{\vec{x}(u,v) = (1-v) \cdot \vec{\alpha}(u), \qquad v \neq 1}$$

ili $\vec{x}(u,v) = \vec{\alpha}(u) + v \cdot \left(-\vec{\alpha}(u)\right)$, gdje je: $\vec{\beta}(u) = -\vec{\alpha}(u)$.

Time je $\vec{x}_u \times \vec{x}_v = (1-v)\vec{\alpha}'(u) \times \left(-\vec{\alpha}(u)\right) \neq \vec{0}$

jer je: $\vec{\alpha}(u) \times \vec{\alpha}'(u) \neq \vec{0}$ za svaki u.

Napomenimo da je helikloid također pravčasta ploha.



Vektorska jednadžba helikloida je:

$$\boxed{\vec{x}(u,v)=(u\cdot\cos v, u\cdot\sin v, b\cdot v),\qquad u\geq 0,\ \ v\in\mathbb{R},\ \ b=konst.}$$

Lako se vidi da je helikloid regularna ploha, jer je:

$$\vec{x}_u\times\vec{x}_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\cdot\sin v & u\cdot\cos v & b\end{vmatrix}=(b\cdot\sin v,-b\cdot\cos v,u)\neq\vec{0}.$$

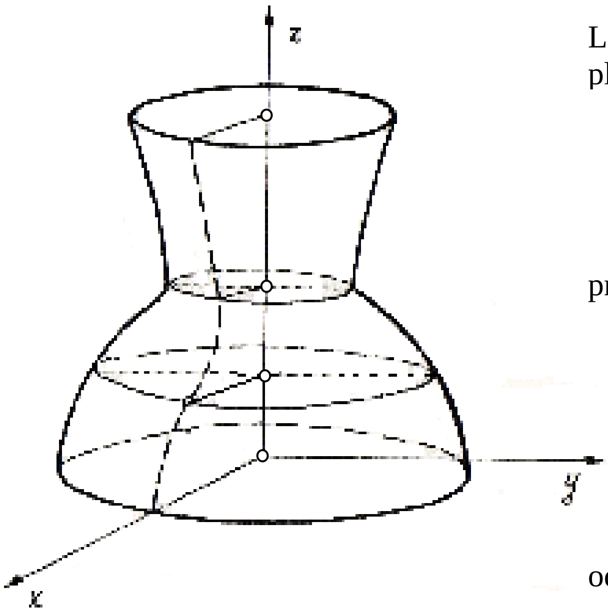
Rotacione plohe

nastaju rotacijom neke regularne krivulje $\mathcal{C}$ ... $\vec{\alpha}(u)=(0, f(u), g(u))$, $u\in\mathrm{I}$

(gdje je I neprazan interval u skupu realnih brojeva te je $f(u)>0$) oko *z* osi.

Vektorska jednadžba rotacione plohe:

$$\boxed{\vec{x}(u,v)=(f(u)\cdot\cos v, f(u)\cdot\sin v, g(u)),\qquad u\in\mathrm{I},\ \ v\in[0,2\pi]}\ .$$



Lako se pokazuje da su rotacione plohe regularne plohe. Naime, iz

$$\vec{x}_u(u,v)=(f'(u)\cdot\cos v, f'(u)\cdot\sin v, g'(u))$$

$$\vec{x}_v(u,v)=(-f(u)\cdot\sin v, f(u)\cdot\cos v, 0)$$

proizlazi:

$$\vec{x}_u\times\vec{x}_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f'(u)\cdot\cos v & f'(u)\cdot\sin v & g'(u)\\ -f(u)\cdot\sin v & f(u)\cdot\cos v & 0\end{vmatrix}$$

odnosno:

$$\vec{x}_u\times\vec{x}_v=f(u)\cdot(-g'(u)\cdot\cos v,-g'(u)\cdot\sin v, f'(u))\neq\vec{0}.$$