3.5 Operator oblika plohe

Prije nego li definiramo operator oblika plohe, podsjetimo se najprije derivacije vektorske i derivacije skalarne funkcije u smjeru bilo kojeg tangencijalnog vektora $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$.

Uzimajući u obzir da je $\mathrm{P} = \vec{x}(u,v) = (x,y,z)$ proizvoljna (varijabilna) točka na regularnoj plohi $\mathrm{M} \ldots\ \vec{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ imamo da je $\{\vec{x}_u(u,v), \vec{x}_v(u,v)\}$ baza prostora $\mathrm{T_P M}$. Time se svaki tangencijalni vektor $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$ zapisuje općim zapisom:

$$\boxed{\vec{V} = c \cdot \vec{x}_u(u,v) + d \cdot \vec{x}_v(u,v)}\,,$$

gdje su c i d koeficijenti (skalarne funkcije ili skalari).

Nadalje, u svakoj točki P plohe M (u kojoj je definiran tangencijalni vektorski prostor $\mathrm{T_P M}$ plohe M) također je definiran i jedinični vektor plošne normale, kojeg ćemo u nastavku označavati sa $\vec{n}(\mathrm{P})$, gdje je: $\vec{n}(\mathrm{P}) = \dfrac{\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v)}{\left|\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v)\right|}$. Jasno, $\vec{n}(\mathrm{P}) \perp \vec{V}$ za svaki $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$.

Promatrajmo na regularnoj plohi $\mathrm{M} \ldots\ \vec{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ bilo koju (regularnu) krivulju $\mathcal{C} \ldots\ \vec{\gamma}(t) = \vec{x}(u(t), v(t))$, $t \in \mathrm{I} = [a,b]$ $\left(\vec{\gamma} : [a,b] \to \mathrm{M}\right)$, gdje je $u = u(t)$, $v = v(t)$. Tada je vektor tangente u bilo kojoj točki $\mathrm{P} = \vec{\gamma}(t)$ krivulje $\mathcal{C}$ dan sa

$$\vec{\gamma}\,'(t) = \vec{x}_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \vec{x}_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t),$$

gdje je $\vec{\gamma}\,'(t) \in \mathrm{T_P M}$

Uzimajući u obzir opći zapis tangencijalnog vektora $\vec{V} = c \cdot \vec{x}_u(u,v) + d \cdot \vec{x}_v(u,v)$, $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$, bez gubitka na općenitosti, možemo podrazumijevati da je:

$$\vec{V} = \vec{\gamma}\,'(t), \quad c = u'(t), \quad d = v'(t),$$

gdje je $u = u(t)$, $v = v(t)$.

✐ Slijedi izračunavanje derivacija vektorske funkcije $\vec{f}$ u smjeru tangencijalnog vektora $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$ u točki P.

Neka je $\vec{f} : \mathrm{M} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \geq 3$ bilo koja vektorska funkcija definirana na regularnoj plohi M i neka je $\vec{\gamma} : [a,b] \to \mathrm{M}$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C} \ldots\ \vec{\gamma}(t) = \vec{x}(u(t), v(t))$ na plohi M. Tada je:

$$\left(\left(\vec{f} \circ \vec{\gamma}\right)(t)\right)' = \left(\vec{f}\left(\vec{\gamma}(t)\right)\right)' = \vec{f}\,'\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \vec{\gamma}\,'(t),$$

odnosno
$$\left(\vec{f}\left(\vec{\gamma}(t)\right)\right)' = \vec{f}\,'(\mathrm{P}) \cdot \vec{V}, \tag{118}$$

gdje je: $\mathrm{P} = \vec{\gamma}(t)$, $\vec{V} = \vec{\gamma}\,'(t)$.

Koristeći poznato svojstvo da je derivacija vektorske funkcije divergens te vektorske funkcije, imamo da se $\vec{f}\,'(\mathrm{P})$ označava sa $\operatorname{div}\vec{f}(\mathrm{P})$ i naziva **divergens vektorske funkcije** $\vec{f}$ **u točki** P. Primjenom uobičajene oznake $\nabla\vec{f}(\mathrm{P}) = \operatorname{div}\vec{f}(\mathrm{P})$ dobivamo da se identitet (118) može pisati u obliku:

$$\boxed{\left(\vec{f}\left(\vec{\gamma}(t)\right)\right)' = \nabla\vec{f}(\mathrm{P})\cdot\vec{V}}\,. \tag{119}$$

Definicija 3.5.1

Derivacija vektorske funkcije $\vec{f}:\mathrm{M}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n}\geq 3$ **u smjeru tangencijalnog vektora** $\vec{V}\in\mathrm{T_PM}$ **u točki** $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$ označava se sa $\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{f}(\mathrm{P})$ i definira se:

$$\boxed{\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{f}(\mathrm{P}) = \nabla\vec{f}(\mathrm{P})\cdot\vec{V}}\,, \tag{120}$$

gdje je $\nabla\vec{f}(\mathrm{P}) = \operatorname{div}\vec{f}(\mathrm{P})$.

<u>*Napomena*</u>: Iz identiteta (119) i (120) proizlazi: $\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{f}(\mathrm{P}) = \left(\vec{f}\left(\vec{\gamma}(t)\right)\right)'$.

✐ Podsjetimo se sada derivacije skalarne funkcije f u smjeru tangencijalnog vektora $\vec{V}\in\mathrm{T_PM}$ u točki P. Analogno gore navedenom, ako je $f:\mathrm{M}\to\mathbb{R}$ bilo koja skalarna funkcija definirana na regularnoj plohi M, pri čemu je $\vec{\gamma}:[a,b]\to\mathrm{M}$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{C}$ na plohi M, onda dobivamo:

$$\left(\left(f\circ\vec{\gamma}\right)(t)\right)' = \left(f\left(\vec{\gamma}(t)\right)\right)' = f\,'\left(\vec{\gamma}(t)\right)\cdot\vec{\gamma}\,'(t) = f\,'(\mathrm{P})\cdot\vec{V}\,,$$

gdje je: $\mathrm{P} = \vec{\gamma}(t)$, $\vec{V} = \vec{\gamma}\,'(t)$ ili:

$$\boxed{\left(f\left(\vec{\gamma}(t)\right)\right)' = \nabla f(\mathrm{P})\cdot\vec{V}}\,. \tag{121}$$

Pritom smo koristili svojstvo da je derivacija skalarne funkcije gradijent te skalarne funkcije, stoga se $f\,'(\mathrm{P})$ označava sa $\operatorname{grad} f(\mathrm{P})$ i naziva **gradijent skalarne funkcije** f **u točki** P. Pritom smo primijenili uobičajenu oznaku $\nabla f(\mathrm{P}) = \operatorname{grad} f(\mathrm{P})$.

❖ **Derivacija skalarne funkcije** $f:\mathrm{M}\to\mathbb{R}$ **u smjeru tangencijalnog vektora** $\vec{V}\in\mathrm{T_PM}$ u točki $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$ označava se sa $\mathrm{D}_{\vec{V}}\,f(\mathrm{P})$ i definira sa:

$$\boxed{\mathrm{D}_{\vec{V}}\,f(\mathrm{P}) = \nabla f(\mathrm{P})\cdot\vec{V}}\,, \tag{122}$$

gdje je $\nabla f(\mathrm{P}) = \operatorname{grad} f(\mathrm{P})$.

<u>*Napomena*</u>: Iz identiteta (121) i (122) proizlazi: $\mathrm{D}_{\vec{V}}\,f(\mathrm{P}) = \left(f\left(\vec{\gamma}(t)\right)\right)'$.

Komentar 3.5.2

Po definiciji je divergens vektorske funkcije (u bilo kojoj varijabilnoj točki) jednak skalarnoj funkciji, stoga će divergens vektorske funkcije u nekoj fiksiranoj točki $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{M}$ biti jednak skalaru. Time zaključujemo da $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\nabla \vec{f}\left(\mathrm{P}_0\right)=\lambda$, čime se identitet (120) za $\mathrm{P}=\mathrm{P}_0$ može pisati u obliku:

$$\mathrm{D}_{\vec{V}}\, \vec{f}\left(\mathrm{P}_0\right)=\nabla \vec{f}\left(\mathrm{P}_0\right)\cdot \vec{V},$$

odnosno

$$\mathrm{D}_{\vec{V}}\, \vec{f}\left(\mathrm{P}_0\right)=\lambda\cdot \vec{V},$$

što se interpretira da je derivacija vektorske funkcije $\vec{f}:\mathrm{M}\rightarrow\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n}\geq 3$ u smjeru tangencijalnog vektora $\vec{V}\in \mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$ u fiksnoj točki $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{M}$ kolinearna s tangencijalnim vektorom $\vec{V}\in \mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$.

Analogno, uzimajući u obzir da je gradijent skalarne funkcije jednak vektorskoj funkciji, odnosno da je gradijent skalarne funkcije u nekoj fiksnoj točki jednak vektoru, zaključujemo da $\exists\, \vec{a}$ takav da je $\nabla f\left(\mathrm{P}_0\right)=\vec{a}$, čime se identitet (122) za $\mathrm{P}=\mathrm{P}_0$ može pisati u obliku:

$$\mathrm{D}_{\vec{V}}\, f\left(\mathrm{P}_0\right)=\nabla f\left(\mathrm{P}_0\right)\cdot \vec{V}=\vec{a}\cdot\vec{V},$$

odnosno

$$\mathrm{D}_{\vec{V}}\, f\left(\mathrm{P}_0\right)=\mu, \quad \text{gdje je } \vec{a}\cdot\vec{V}=\mu,\ \ \mu\in\mathbb{R}.$$

Time dobivamo da je derivacija skalarne funkcije $f:\mathrm{M}\rightarrow\mathbb{R}$ u smjeru tangencijalnog vektora $\vec{V}\in \mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$ u točki $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{M}$ jednaka skalaru.

- Motivacija sljedećih razmatranja je određivanje zakrivljenosti normalnog presjeka regularne plohe M u točki $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$ (vidi definiciju 3.4.6), čime se nameće problem određivanja derivacije vektorske funkcije $\vec{n}\left(\mathrm{P}\right)=\dfrac{\vec{x}_u\left(u,v\right)\times\vec{x}_v\left(u,v\right)}{\left|\vec{x}_u\left(u,v\right)\times\vec{x}_v\left(u,v\right)\right|}$ u smjeru tangencijalnog vektora $\vec{V}\in\mathrm{T}_{\mathrm{P}}\mathrm{M}$ u točki $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$.

Primjenom definicije 3.5.1 dobivamo:

$$\boxed{\mathrm{D}_{\vec{V}}\, \vec{n}\left(\mathrm{P}\right)=\nabla\vec{n}\left(\mathrm{P}\right)\cdot\vec{V}}, \tag{123}$$

gdje je $\nabla\vec{n}\left(\mathrm{P}\right)=\mathrm{div}\,\vec{n}\left(\mathrm{P}\right)$.

Reparametriziramo li normalni presjek regularne plohe M, tj. krivulju $\mathcal{C}^*$ ... $\vec{\xi}\left(t\right)=\vec{x}\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)$, $t\in\left\langle a,b\right\rangle$ po njenom prirodnom parametru s, dobivamo da se vektorska jednadžba krivulje $\mathcal{C}^*$ može pisati u obliku:

$$\vec{\xi}(s)=\vec{x}\big(u(s),v(s)\big),\qquad s\in[0,\mathrm{L}],$$

gdje je: $\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{\xi}\,'(s)\in\mathrm{T_PM}$ i $\mathrm{P}=\vec{\xi}(s)$. Time, u ovom slučaju, možemo podrazumijevati da je

$$\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{V}\quad \text{i}\quad \vec{\mathrm{N}}(s)=\pm\vec{n}(\mathrm{P}),\tag{124}$$

gdje je $\vec{\mathrm{T}}(s)$ jedinični vektor tangente, a $\vec{\mathrm{N}}(s)$ jedinični vektor normale u točki $\mathrm{P}=\vec{\xi}(s)$ krivulje $\mathcal{C}^*$ $\left(\text{čime je: } |\vec{V}|=|\vec{n}(\mathrm{P})|=1\right)$ Nadalje, primjenom Frenet-Serret-ovih formula (komentar 2.6.5), imamo da je:

$$\vec{\mathrm{T}}'(s)=\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s),\qquad \vec{\mathrm{N}}'(s)=-\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{T}}(s),$$

gdje se $\chi(s)$ interpretira kao zakrivljenost normalnog presjeka regularne plohe M, tj. zakrivljenost krivulje $\mathcal{C}^*$ zadane vektorskom jednadžbom $\vec{\xi}(s)=\vec{x}\big(u(s),v(s)\big)$.

Primijetimo da iz identiteta $\vec{\mathrm{N}}(s)=\pm\vec{n}(\mathrm{P})$ proizlazi

$$\vec{\mathrm{N}}(s)\cdot\vec{n}(\mathrm{P})=\pm1,$$

stoga uzimajući u obzir da je $\mathrm{P}=\vec{\xi}(s)$ dobivamo

$$\vec{\mathrm{N}}(s)\cdot\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)=\pm1\ \Big/\cdot\chi(s),$$

odnosno

$$\pm\chi(s)=\underbrace{\chi(s)\cdot\vec{\mathrm{N}}(s)}_{=\vec{\mathrm{T}}'(s)}\cdot\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)=\underbrace{\vec{\mathrm{T}}'(s)\cdot\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)=-\vec{\mathrm{T}}(s)\cdot\Big(\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)\Big)'}_{\text{(lema 2.4.1)}}.$$

odakle je

$$\pm\chi(s)=-\vec{\mathrm{T}}(s)\cdot\Big(\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)\Big)'.\tag{125}$$

Pritom smo primijenili lemu 2.4.1, budući da je $\vec{\mathrm{T}}(s)\cdot\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)=0$.

Napomena:

$\vec{\mathrm{T}}(s)\cdot\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)=0$ direktno slijedi iz činjenice $\vec{\mathrm{T}}(s)\perp\vec{\mathrm{N}}(s)$,

gdje je $\vec{\mathrm{N}}(s)=\pm\vec{n}(\mathrm{P})$ i $\vec{n}(\mathrm{P})=\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)$, što povlači: $\vec{\mathrm{T}}(s)\perp\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)$.

S druge strane, imamo da je

$$\Big(\vec{n}\big(\vec{\xi}(s)\big)\Big)'=\vec{n}\,'\underbrace{\big(\vec{\xi}(s)\big)}_{=\mathrm{P}}\cdot\underbrace{\vec{\xi}\,'(s)}_{=\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{V}}=\vec{n}\,'(\mathrm{P})\cdot\vec{V}=\nabla\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{V}=\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P}),$$

stoga se identitet (125) može dalje pisati u obliku: $\pm\chi(s)=-\underbrace{\vec{\mathrm{T}}(s)}_{=\vec{V}}\cdot\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P})$ ili

$$\boxed{\pm\chi(s) = -\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{V}}\,. \tag{126}$$

Interpretacija identiteta (126)

Zakrivljenost normalnog presjeka $\mathcal{C}^*$ ... $\vec{\xi}(s) = \vec{x}(u(s), v(s))$ regularne plohe M u bilo kojoj njenoj točki $\mathrm{P} = \vec{\xi}(s)$ je u direktnoj vezi sa derivacijom plošne normale $\vec{n}(\mathrm{P})$ u smjeru tangencijalnog vektora $\vec{V} = \vec{\xi}\,'(s) \in \mathrm{T_P M}$ u toj točki P.

Propozicija 3.5.3

Za svaki tangencijalni vektor $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$ vrijedi da je $\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P}) \in \mathrm{T_P M}$.

Dokaz:

Podsjetimo se da je $\vec{n}(\mathrm{P}) = \dfrac{\vec{x}_u(u,v)\times\vec{x}_v(u,v)}{\left|\vec{x}_u(u,v)\times\vec{x}_v(u,v)\right|}$, stoga je: $\left|\vec{n}(\mathrm{P})\right| = 1$.

Primjenom leme 2.4.1 imamo: $\left|\vec{n}(\mathrm{P})\right| = 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{n}\,'(\mathrm{P}) = 0$, gdje je $\vec{n}\,'(\mathrm{P}) = \nabla\vec{n}(\mathrm{P})$.

Pomnožimo li jednadžbu $\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\nabla\vec{n}(\mathrm{P}) = 0$ sa bilo kojim tangencijalnim vektorom $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$ dobivamo: $\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\nabla\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{V} = 0$ (gdje se 0 identificira sa $\vec{0}$)

pa primjenom identiteta (123) proizlazi $\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P}) = 0$, odnosno $\vec{n}(\mathrm{P}) \perp \mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P})$.
Nadalje, uzimajući u obzir da je $\vec{n}(\mathrm{P}) \perp \vec{V}$ za svaki $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$ zaključujemo da su vektorske funkcije $\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P})$ i $\vec{V}$ kolinearne za svaki $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$, odakle direktno proizlazi $\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P}) \in \mathrm{T_P M}$.

Definicija 3.5.4

Linearno preslikavanje $S_\mathrm{P} : \mathrm{T_P M} \to \mathrm{T_P M}$ definirano sa:

$$S_\mathrm{P}\left(\vec{V}\right) = -\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P}), \quad \text{za svaki } \vec{V} \in \mathrm{T_P M} \tag{127}$$

naziva se **operator oblika plohe** M.

Propozicija 3.5.5

Za bilo koja dva tangencijalna vektora $\vec{U}, \vec{V} \in \mathrm{T_P M}$ vrijedi

$$S_\mathrm{P}\left(\vec{U}\right)\cdot\vec{V} = \vec{U}\cdot S_\mathrm{P}\left(\vec{V}\right). \tag{128}$$

Drugim riječima $S_\mathrm{P} : \mathrm{T_P M} \to \mathrm{T_P M}$ je simetrično linearno preslikavanje.

Dokaz:

Pretpostavimo da je $\mathrm{P} = \vec{x}(u,v) = (x, y, z)$ proizvoljna točka na regularnoj plohi

$$\mathrm{M}\ \ldots\ \vec{x}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big).$$

Tada je u točki P definiran tangencijalni vektorski prostor $\mathrm{T_P M}$ plohe M, kojemu je baza skup $\left\{\vec{x}_u(u,v), \vec{x}_v(u,v)\right\}$ pa se bilo koja dva tangencijalna vektora $\vec{U}, \vec{V} \in \mathrm{T_P M}$ mogu pisati u obliku:

$$\vec{U} = a \cdot \vec{x}_u(u,v) + b \cdot \vec{x}_v(u,v), \qquad \vec{V} = c \cdot \vec{x}_u(u,v) + d \cdot \vec{x}_v(u,v), \tag{129}$$

gdje su a,b,c,d koeficijenti.

- Pretpostavimo najprije da je $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$. Tada iz identiteta (129) dobivamo:

$$\vec{U} = \vec{x}_u(u,v), \qquad \vec{V} = \vec{x}_v(u,v).$$

Koristeći činjenicu da je $\vec{n}(\mathrm{P}) \perp \vec{V}$, tj. $\vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{V} = 0$ za svaki $\vec{V} \in \mathrm{T_P M}$ dobivamo dvije jednadžbe

$$\vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_u(u,v) = 0, \qquad \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_v(u,v) = 0,$$

odakle je:

$$\vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_u(u,v) = 0 \quad \Big/ \ \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \vec{n}(\mathrm{P})}{\partial u} \cdot \vec{x}_u(u,v) + \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \frac{\partial \vec{x}_u(u,v)}{\partial u} = 0$$

$$\mathrm{D}_{\vec{x}_u(u,v)} \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_u(u,v) + \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_{uu}(u,v) = 0$$

$$\underline{-\mathrm{D}_{\vec{x}_u(u,v)} \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_u(u,v) = \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_{uu}(u,v)} \tag{130}$$

odnosno

$$\vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_u(u,v) = 0 \quad \Big/ \ \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \vec{n}(\mathrm{P})}{\partial v} \cdot \vec{x}_u(u,v) + \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \frac{\partial \vec{x}_u(u,v)}{\partial v} = 0$$

$$\mathrm{D}_{\vec{x}_v(u,v)} \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_u(u,v) + \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_{uv}(u,v) = 0$$

$$\underline{-\mathrm{D}_{\vec{x}_v(u,v)} \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_u(u,v) = \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_{uv}(u,v)} \tag{131}$$

i analogno

$$\vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_v(u,v) = 0 \quad \Big/ \ \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \vec{n}(\mathrm{P})}{\partial u} \cdot \vec{x}_v(u,v) + \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \frac{\partial \vec{x}_v(u,v)}{\partial u} = 0$$

$$\mathrm{D}_{\vec{x}_u(u,v)} \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_v(u,v) + \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_{vu}(u,v) = 0$$

$$\underline{-\mathrm{D}_{\vec{x}_u(u,v)} \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_v(u,v) = \vec{n}(\mathrm{P}) \cdot \vec{x}_{vu}(u,v)} \tag{132}$$

odnosno

$$\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_v(u,v)=0 \;\Big/\; \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial\vec{n}(\mathrm{P})}{\partial v}\cdot\vec{x}_v(u,v)+\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\frac{\partial\vec{x}_v(u,v)}{\partial v}=0$$

$$\mathrm{D}_{\vec{x}_v(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_v(u,v)+\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_{vv}(u,v)=0$$

$$\underline{-\mathrm{D}_{\vec{x}_v(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_v(u,v)=\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_{vv}(u,v)} \tag{133}$$

Koristeći svojstvo $\vec{x}_{uv}(u,v)=\vec{x}_{vu}(u,v)$ imamo da iz identiteta (131) i (132) proizlazi:

$$\underline{\mathrm{D}_{\vec{x}_u(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_v(u,v)=\mathrm{D}_{\vec{x}_v(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_u(u,v).} \tag{134}$$

Primjenom identiteta (127) dobivamo:

$$S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)=-\mathrm{D}_{\vec{x}_u(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P}), \tag{135}$$

$$S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)=-\mathrm{D}_{\vec{x}_v(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P}). \tag{136}$$

Time je

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)\cdot\vec{x}_v(u,v) &\overset{(135)}{=}-\mathrm{D}_{\vec{x}_u(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_v(u,v)\\ &\overset{(134)}{=}-\mathrm{D}_{\vec{x}_v(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_u(u,v)\\ &=\vec{x}_u(u,v)\cdot\left(-\mathrm{D}_{\vec{x}_v(u,v)}\vec{n}(\mathrm{P})\right)\\ &\overset{(136)}{=}\vec{x}_u(u,v)\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\end{aligned}$$

odnosno

$$S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)\cdot\vec{x}_v(u,v)=\vec{x}_u(u,v)\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right), \tag{137}$$

što dokazuje identitet (128) u specijalnom slučaju za $\vec{U}=\vec{x}_u(u,v)$, $\vec{V}=\vec{x}_v(u,v)$.

Dokažimo sada da vrijedi identitet (128) za bilo koja dva tangencijalna vektora $\vec{U},\vec{V}\in\mathrm{T_PM}$ koji su dani identitetima (129).

Koristeći svojstvo linearnosti operatora S_{P}:

$$S_{\mathrm{P}}\left(a\cdot\vec{x}_u(u,v)+b\cdot\vec{x}_v(u,v)\right)=a\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)+b\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right),$$

te primjenom identiteta (137) dobivamo:

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{P}}\left(\vec{U}\right)\cdot\vec{V} &= \left(a\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)+b\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\right)\cdot\left(c\cdot\vec{x}_u(u,v)+d\cdot\vec{x}_v(u,v)\right).\\
&= ac\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)\cdot\vec{x}_u(u,v)+ad\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)\cdot\vec{x}_v(u,v)\\
&\quad +bc\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\cdot\vec{x}_u(u,v)+bd\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\cdot\vec{x}_v(u,v)\\
&\overset{(137)}{=} ac\cdot\vec{x}_u(u,v)\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)+ad\cdot\vec{x}_u(u,v)\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\\
&\quad +bc\cdot\vec{x}_v(u,v)\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)+bd\cdot\vec{x}_v(u,v)\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\\
&= a\cdot\vec{x}_u(u,v)\cdot\left(c\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)+d\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\right)\\
&\quad +b\cdot\vec{x}_v(u,v)\cdot\left(c\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)+d\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\right)\\
&= \left(a\cdot\vec{x}_u(u,v)+b\cdot\vec{x}_v(u,v)\right)\cdot\left(c\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)+d\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right)\right)\\
&= \vec{U}\cdot S_{\mathrm{P}}\left(c\cdot\vec{x}_u(u,v)+d\cdot\vec{x}_v(u,v)\right)\\
&= \vec{U}\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{V}\right).
\end{aligned}
$$

Time je dokazan identitet (128) za bilo koja dva tangencijalna vektora $\vec{U},\vec{V}\in \mathrm{T_P M}$.

Propozicija 3.5.6

Ako je operator oblika plohe M jednak nuli za svaki tangencijalni vektor $\vec{V}\in \mathrm{T_P M}$ u svakoj točki P plohe M, onda je ta ploha M ravnina.

Dokaz:

Pretpostavimo da je $S_{\mathrm{P}}\left(\vec{V}\right)=0$, za svaki $\vec{V}\in \mathrm{T_P M}$ i svaku točku $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$.

Uzimajući u obzir da je $S_{\mathrm{P}}\left(\vec{V}\right)=-\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P})$ (definicija 3.5.4) dobivamo:

$$\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\vec{n}(\mathrm{P})=0 \quad \text{za svaki } \vec{V}\in \mathrm{T_P M} \text{ i svaku točku } \mathrm{P}\in\mathrm{M}.$$

Budući da je derivacija plošne normale u smjeru bilo kojeg tangencijalnog vektora u svakoj točki plohe M jednaka nuli, zaključujemo da je

$$\vec{n}(\mathrm{P})=konst. \quad \text{za svaki } \vec{V}\in \mathrm{T_P M} \text{ i svaku točku } \mathrm{P}\in\mathrm{M},$$

što se interpretira da je u svakoj točki plohe M jedinični vektor plošne normale konstantan. To je moguće jedino ako je ploha M ravnina (vidi primjer 3.4.4).