3.7 Glavne zakrivljenosti, Gaussova (totalna) i srednja zakrivljenost

Prije nego li definiramo glavne zakrivljenosti i glavne smjerove podsjetiti ćemo se najprije što su svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori nekog operatora tj. matrice (vidi Dodatak).

Podsjetimo se, simetričnom linearnom operatoru $S_{\mathrm{P}} : \mathrm{T_P M} \to \mathrm{T_P M}$ (propozicija 3.5.5) pridružena je simetrična kvadratna matrica drugog reda $S_{\mathrm{P}} = \left(\mathrm{I_P}\right)^{-1} \cdot \mathrm{II_P}$, pri čemu je

$$S_{\mathrm{P}} = \frac{1}{g} \cdot \begin{bmatrix} g_{22}\, b_{11} - g_{12}\, b_{12} & g_{22}\, b_{12} - g_{12}\, b_{22} \\ g_{11}\, b_{12} - g_{12}\, b_{11} & g_{11}\, b_{22} - g_{12}\, b_{12} \end{bmatrix}.$$

Iz svojstva simetričnosti matrice S_{P} proizlazi $\boxed{g_{22}\, b_{12} - g_{12}\, b_{22} = g_{11}\, b_{12} - g_{12}\, b_{11}}$, stoga ćemo u nastavku pisati:

$$S_{\mathrm{P}} = \frac{1}{g} \cdot \begin{bmatrix} g_{22}\, b_{11} - g_{12}\, b_{12} & g_{11}\, b_{12} - g_{12}\, b_{11} \\ g_{11}\, b_{12} - g_{12}\, b_{11} & g_{11}\, b_{22} - g_{12}\, b_{12} \end{bmatrix}. \tag{154}$$

Lako se vidi da je trag matrice S_{P} dan sa:

$$\boxed{tr\, S_{\mathrm{P}} = \frac{g_{11}\, b_{22} - 2 g_{12}\, b_{12} + g_{22}\, b_{11}}{g}} \tag{155}$$

te da je:

$$\boxed{\det S_{\mathrm{P}} = \frac{b}{g}}, \tag{156}$$

gdje je $b = b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2$, $g = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2$ (korolar 3.6.6).

Odredimo sada svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore simetrične matrice S_{P}.

Uočimo da svojstveni vektori matrice S_{P} su tangencijalni vektori iz tangencijalnog vektorskog prostora $\mathrm{T_P M}$.

Dakle, primjenom teorema 1 (iz Dodatka) proizlazi da simetrična kvadratna matrica S_{P} (drugog reda) ima dvije različite realne svojstvene vrijednosti $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$, kojima korespondiraju dva međusobno ortogonalna svojstvena vektora $\vec{\mathrm{f}}_1(\mathrm{P})$ i $\vec{\mathrm{f}}_2(\mathrm{P})$ iz prostora $\mathrm{T_P M}$.
Jasno, pritom je:

$$S_{\mathrm{P}} \cdot \vec{\mathrm{f}}_i(\mathrm{P}) = \mathrm{k}_i(\mathrm{P}) \cdot \vec{\mathrm{f}}_i(\mathrm{P}), \quad i = 1, 2.$$

Time je karakteristična jednadžba zapravo kvadratna jednadžba oblika

$$\boxed{\left(k(\mathrm{P})\right)^2 - tr\, S_{\mathrm{P}} \cdot k(\mathrm{P}) + \det S_{\mathrm{P}} = 0}, \tag{157}$$

čiji se korijeni $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ izračunavaju po formuli

$$k_{1,2}(\mathrm{P})=\frac{tr\,S_{\mathrm{P}}\pm\sqrt{(tr\,S_{\mathrm{P}})^2-4\cdot\det S_{\mathrm{P}}}}{2}.$$

Primijetimo da je:

$$\left.\begin{aligned} k_1(\mathrm{P})+k_2(\mathrm{P})&=tr\,S_{\mathrm{P}}, \\ k_1(\mathrm{P})\cdot k_2(\mathrm{P})&=\det S_{\mathrm{P}}, \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

stoga primjenom izraza (155) i (156) dobivamo:

$$\left.\begin{aligned} k_1(\mathrm{P})+k_2(\mathrm{P})&=\frac{g_{11}\,b_{22}-2g_{12}\,b_{12}+g_{22}\,b_{11}}{g} \\ k_1(\mathrm{P})\cdot k_2(\mathrm{P})&=\frac{b}{g} \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

gdje je $b=b_{11}\,b_{22}-b_{12}^2$, $g=g_{11}\,g_{22}-g_{12}^2$.

Definicija 3.7.1

Svojstvene vrijednosti $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ simetrične kvadratne matrice S_{P} nazivaju se **glavne zakrivljenosti**, a njima korenspondirajući svojstveni vektori $\vec{\mathrm{f}}_1(\mathrm{P}),\vec{\mathrm{f}}_2(\mathrm{P})\in \mathrm{T_PM}$ nazivaju se **glavni smjerovi**.

Iz prethodno navedenog proizlazi da su glavni smjerovi međusobno ortogonalni. Jasno, glavni smjerovi nužno ne moraju biti jedinični vektori.

Označimo sa $\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})$ i $\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})$ jedinične glavne smjerove u točki P regularne plohe M, tj. neka je

$$\vec{\mathrm{e}}_i(\mathrm{P})=\frac{\vec{\mathrm{f}}_i(\mathrm{P})}{\left|\vec{\mathrm{f}}_i(\mathrm{P})\right|},\quad i=1,2$$

Tada je $\left\{\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P}),\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})\right\}$ ortonormirana baza prostora $\mathrm{T_PM}$ u točki $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$ $\Big($jer je $\left|\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})\right|=1$, $\left|\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})\right|=1$, $\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})\perp\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})\Big)$.

Dakle, dobili smo novu bazu prostora $\mathrm{T_PM}$, koja je razapeta međusobno ortogonalnim jediničnim glavnim smjerovima, stoga će se u nastavku bilo koji tangencijalni vektor $\vec{V}\in\mathrm{T_PM}$ prikazivati u obliku linearne kombinacije jediničnih glavnih smjerova $\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})$ i $\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})$.

Definicija 3.7.2

Produkt glavnih zakrivljenosti naziva se **Gaussova zakrivljenost** i označava sa K, a aritmetička sredina glavnih zakrivljenosti naziva se **srednja zakrivljenost** i označava sa H.

Komentar 3.7.3

Uzimajući u obzir definicije 3.7.1 i 3.7.2 kao i identitete (158), (159) dobivamo:

$$\mathrm{K} = \det S_{\mathrm{P}}, \qquad \mathrm{H} = \frac{1}{2} \cdot tr\, S_{\mathrm{P}} \tag{160}$$

odnosno

$$\boxed{\mathrm{K} = \frac{b}{g}} \tag{161}$$

$$\boxed{\mathrm{H} = \frac{g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12} + g_{22} b_{11}}{2g}} \tag{162}$$

gdje je: $b = b_{11} b_{22} - b_{12}^2$, $g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$.

Koristeći (160) dobivamo da se karakteristična jednadžba (157) može pisati u obliku:

$$\boxed{\left(k(\mathrm{P})\right)^2 - 2\mathrm{H} \cdot k(\mathrm{P}) + \mathrm{K} = 0}\,, \tag{163}$$

odakle proizlazi da su glavne zakrivljenosti $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ korijeni (tj. rješenja) karakteristične jednadžbe (163).

Pritom se Gaussova zakrivljenost izračunava primjenom formule (161), a srednja zakrivljenost primjenom formule (162).

Podsjetimo se da je:

$$g_{11} = \vec{x}_u(u,v) \cdot \vec{x}_u(u,v), \qquad g_{12} = \vec{x}_u(u,v) \cdot \vec{x}_v(u,v), \qquad g_{22} = \vec{x}_v(u,v) \cdot \vec{x}_v(u,v),$$

$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$ te da je

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\vec{x}_u(u,v), \vec{x}_v(u,v), \vec{x}_{uu}(u,v)\right),$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\vec{x}_u(u,v), \vec{x}_v(u,v), \vec{x}_{uv}(u,v)\right),$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\vec{x}_u(u,v), \vec{x}_v(u,v), \vec{x}_{vv}(u,v)\right).$$

Propozicija 3.7.4 (Eulerova formula)

Neka je $\left\{\vec{e}_1(P), \vec{e}_2(P)\right\}$ ortonormirana baza prostora $T_P M$, pri čemu u svakoj točki P regularne plohe M (jediničnim) glavnim smjerovima $\vec{e}_i(P)$ korenspondiraju glavne zakrivljenosti $k_i(P)$, $i = 1, 2$. Tada za svaki jedinični tangencijalni vektor $\vec{V} = \cos\theta \cdot \vec{e}_1(P) + \sin\theta \cdot \vec{e}_2(P)$ vrijedi:

$$\mathrm{II}_P\left(\vec{V}, \vec{V}\right) = k_1(P) \cdot \cos^2\theta + k_2(P) \cdot \sin^2\theta \tag{164}$$

odnosno

$$\pm\chi(s) = k_1(P) \cdot \cos^2\theta + k_2(P) \cdot \sin^2\theta, \tag{165}$$

gdje je $\theta \in \left[0, 2\pi\right\rangle$

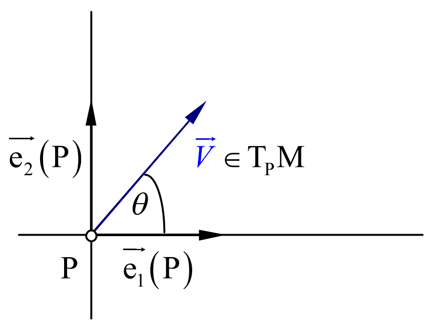
Dokaz:

Prije nego li dokažemo danu propoziciju uočimo

(1) ako je $\left\{\vec{e}_1(P), \vec{e}_2(P)\right\}$ ortonormirana baza prostora $T_P M$, onda se svaki jedinični tangencijalni vektor $\vec{V} \in T_P M$ može prikazati u obliku

$$\vec{V} = \cos\theta \cdot \vec{e}_1(P) + \sin\theta \cdot \vec{e}_2(P),$$

gdje je $\theta = \measuredangle\left(\vec{e}_1(P), \vec{V}\right)$ $\left(\text{tj. } \theta \in \left[0, 2\pi\right\rangle\right)$;



(2) iz pretpostavke propozicije proizlazi

$$S_P\left(\vec{e}_i(P)\right) = k_i(P) \cdot \vec{e}_i(P), \quad i = 1, 2 \tag{166}$$

gdje je $S_P : T_P M \to T_P M$ linearan i simetričan operator (propozicija 3.5.5).

Koristeći definiciju 3.6.1, svojstvo linearnosti operatora S_{P} i identitete (166) dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}_{\mathrm{P}}\left(\vec{V},\vec{V}\right) &= S_{\mathrm{P}}\left(\vec{V}\right)\cdot\vec{V} = S_{\mathrm{P}}\left(\cos\theta\cdot\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})+\sin\theta\cdot\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})\right)\cdot\left(\cos\theta\cdot\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})+\sin\theta\cdot\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})\right)\\
&=\left(\cos\theta\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})\right)+\sin\theta\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})\right)\right)\cdot\left(\cos\theta\cdot\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})+\sin\theta\cdot\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})\right)\\
&=\left(\cos\theta\cdot k_1(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})+\sin\theta\cdot k_2(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})\right)\cdot\left(\cos\theta\cdot\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})+\sin\theta\cdot\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})\right)\\
&=\cos^2\theta\cdot k_1(\mathrm{P})\cdot\underbrace{\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})}_{=\left|\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})\right|^2=1}+\left(\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot k_1(\mathrm{P})+\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot k_2(\mathrm{P})\right)\cdot\underbrace{\vec{\mathrm{e}_1}(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})}_{=0}\\
&\quad+\sin^2\theta\cdot k_2(\mathrm{P})\cdot\underbrace{\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})}_{=\left|\vec{\mathrm{e}_2}(\mathrm{P})\right|^2=1}
\end{aligned}
$$

odnosno

$$\mathrm{II}_{\mathrm{P}}\left(\vec{V},\vec{V}\right)=k_1(\mathrm{P})\cdot\cos^2\theta+k_2(\mathrm{P})\cdot\sin^2\theta$$

što dokazuje identitet (164).

Identitet (165) direktno proizlazi iz identiteta (164), pri čemu se koristi prethodno dokazan identitet (151), prema kojemu je $\pm\chi(s)=\mathrm{II}_{\mathrm{P}}\left(\vec{V},\vec{V}\right)$ za svaki $\vec{V}\in \mathrm{T}_{\mathrm{P}}\mathrm{M}$.

Identiteti (164) i (165) nazivaju se Eulerovim formulama.

Korolar 3.7.5

Glavne zakrivljenosti $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ su ekstremne zakrivljenosti (tj. minimalna i maksimalna zakrivljenost) od svih zakrivljenosti normalnih presjeka regularne plohe M u nekoj točki $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$.
Drugim riječima, vrijedi

$$k_1(\mathrm{P})\le\pm\chi(s)\le k_2(\mathrm{P}) \quad \text{ili} \quad k_2(\mathrm{P})\le\pm\chi(s)\le k_1(\mathrm{P}). \tag{167}$$

Dokaz:

Uočimo da iz identiteta $\pm\chi(s)=\mathrm{II}_{\mathrm{P}}\left(\vec{V},\vec{V}\right)$ za svaki $\vec{V}\in \mathrm{T}_{\mathrm{P}}\mathrm{M}$ proizlazi da zakrivljenost $\chi(s)$ normalnog presjeka (regularne plohe M u točki $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$) ovisi o tangencijalnom vektoru $\vec{V}\in \mathrm{T}_{\mathrm{P}}\mathrm{M}$.

Naime, u ovisnosti o izboru tangencijalnog vektora iz prostora $\mathrm{T}_{\mathrm{P}}\mathrm{M}$ dobivaju se različiti normalni presjeci regularne plohe M, kojima je zakrivljenost jednaka drugoj fundamentalnoj formi odabranog tangencijalnog vektora iz $\mathrm{T}_{\mathrm{P}}\mathrm{M}$.

Dokažimo sada da vrijedi identitet $k_1(\mathrm{P})\le\pm\chi(s)\le k_2(\mathrm{P})$.

Pretpostavimo da su $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ glavne zakrivljenosti takve da je $k_1(\mathrm{P}) \le k_2(\mathrm{P})$. Tada je

$$k_2(\mathrm{P}) - k_1(\mathrm{P}) \ge 0 \qquad \text{ili} \qquad k_1(\mathrm{P}) - k_2(\mathrm{P}) \le 0 . \tag{168}$$

Uzimajući u obzir Eulerovu formulu (165):

$$\pm\chi(s) = k_1(\mathrm{P}) \cdot \cos^2\theta + k_2(\mathrm{P}) \cdot \sin^2\theta , \qquad \text{za svaki } \theta \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$

dobivamo:

$$\pm\chi(s) = k_1(\mathrm{P}) \cdot \left(1 - \sin^2\theta\right) + k_2(\mathrm{P}) \cdot \sin^2\theta$$

odnosno

$$\pm\chi(s) = k_1(\mathrm{P}) + \underbrace{\underbrace{\left(k_2(\mathrm{P}) - k_1(\mathrm{P})\right)}_{\ge 0} \cdot \underbrace{\sin^2\theta}_{0 \le \sin^2\theta \le 1}}_{\ge 0} \ge k_1(\mathrm{P}), \tag{169}$$

pri čemu se koristilo svojstvo (168). Analogno se iz Eulerove formule (165) dobiva

$$\pm\chi(s) = k_1(\mathrm{P}) \cdot \cos^2\theta + k_2(\mathrm{P}) \cdot \left(1 - \cos^2\theta\right)$$

odnosno

$$\pm\chi(s) = k_2(\mathrm{P}) + \underbrace{\underbrace{\left(k_1(\mathrm{P}) - k_2(\mathrm{P})\right)}_{\le 0} \cdot \underbrace{\cos^2\theta}_{0 \le \cos^2\theta \le 1}}_{\le 0} \le k_2(\mathrm{P}), \tag{170}$$

pri čemu se koristilo svojstvo (168). Dobili smo:

$$k_1(\mathrm{P}) \le \pm\chi(s) \le k_2(\mathrm{P}).$$

Analogno gore navedenom dokazuje se da vrijedi $k_2(\mathrm{P}) \le \pm\chi(s) \le k_1(\mathrm{P})$ uz uvjet $k_2(\mathrm{P}) \le k_1(\mathrm{P})$.