3.8 Glavne krivulje zakrivljenosti (crte krivine). Asimptotska krivulja

Ponovimo, svojstvenim vrijednostima (*glavnim zakrivljenostima*) $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ operatora $S_\mathrm{P}:\mathrm{T_PM}\to\mathrm{T_PM}$ korenspondiraju jedinični svojstveni vektori (*glavni smjerovi*) $\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})$ i $\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})$, što se zapisuje u obliku:

$$S_\mathrm{P}\left(\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})\right)=k_1(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P}),\qquad S_\mathrm{P}\left(\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})\right)=k_2(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P}),$$

gdje je $\left|\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})\right|=1$, $\left|\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})\right|=1$, $\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})\perp\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})$ $\left(\text{tj. } \vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})=0\right)$, $\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P}),\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})\in\mathrm{T_PM}$, stoga je $\left\{\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P}),\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})\right\}$ ortonormirana baza prostora $\mathrm{T_PM}$ u točki $\mathrm{P}\in\mathrm{M}$.

Simetričnom linearnom operatoru $S_\mathrm{P}:\mathrm{T_PM}\to\mathrm{T_PM}$ pridružena je simetrična kvadratna matrica (drugog reda)

$$S_\mathrm{P}=\frac{1}{g}\cdot\begin{bmatrix} g_{22}\,b_{11}-g_{12}\,b_{12} & g_{11}\,b_{12}-g_{12}\,b_{11} \\ g_{11}\,b_{12}-g_{12}\,b_{11} & g_{11}\,b_{22}-g_{12}\,b_{12}\end{bmatrix}.$$

Ako $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ promatramo kao svojstvene vrijednosti matrice S_P, kojima korenspondiraju $\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})$ i $\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})$ jedinični svojstveni vektori (matrice S_P), onda je:

$$S_\mathrm{P}\cdot\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})=k_1(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P}),\qquad S_\mathrm{P}\cdot\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})=k_2(\mathrm{P})\cdot\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P}).$$

Definicija 3.8.1

Krivulja na plohi M naziva se **glavna krivulja zakrivljenosti ili crta krivine** ako u svakoj točki te krivulje je vektor tangente (tj. jedinični vektor tangente) glavni smjer (tj. jedinični glavni smjer).

Komentar 3.8.2

Uočimo da glavne zakrivljenosti i glavni smjerovi (tj. jedinični glavni smjerovi) ovise o izboru točke na regularnoj plohi $\mathrm{M}\ldots\ \vec{x}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$.

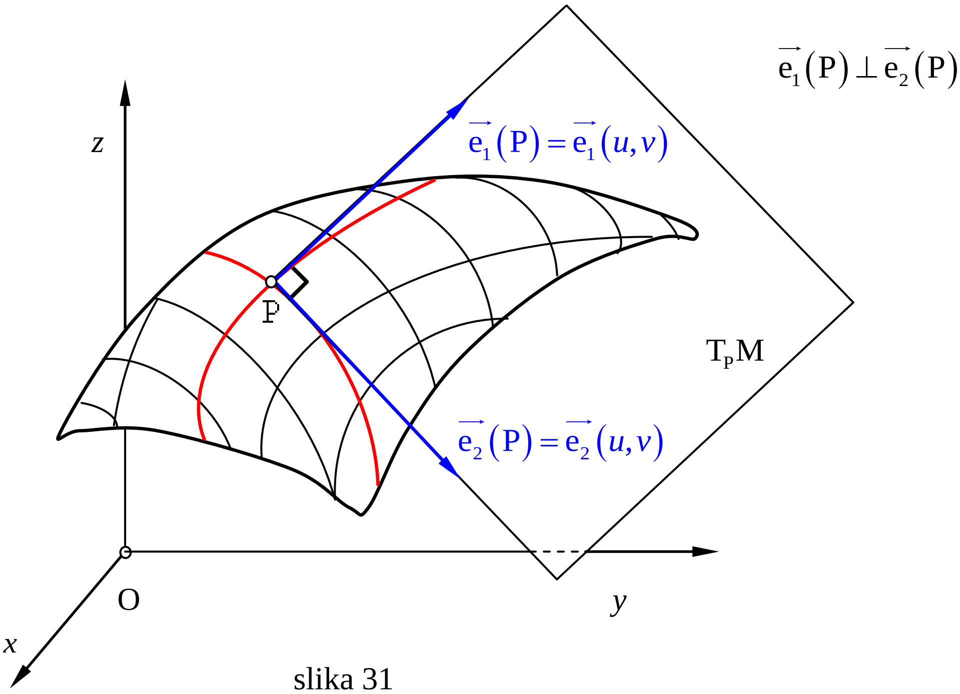
U suglasnosti s definicijom 3.8.1 zaključujemo da u bilo kojoj točki $\mathrm{P}=\vec{x}(u,v)$ regularne plohe M postoje dvije familije krivulja takvih da je svaka krivulja iz jedne familije ortogonalna na neku pripadnu krivulju iz druge familije.

Jasno, krivulje iz objih familija su glavne krivulje zakrivljenosti (koje se nazivaju i crte krivine), stoga zaključujemo:

✎ u svakoj točki P regularne plohe M postoje dvije familije glavnih krivulja zakrivljenosti koje tvore ortogonalnu mrežu na plohi M, pri čemu u svakoj točki P (jedinični) vektor tangente na pripadnu glavnu krivulju zakrivljenosti je (jedinični) glavni smjer - slika 31.

$\left\{\vec{e}_1(\mathrm{P}),\vec{e}_2(\mathrm{P})\right\}\quad \forall\, \mathrm{P}\in \mathrm{M}$

je ortonormirana baza prostora $\mathrm{T_PM}$



slika 31

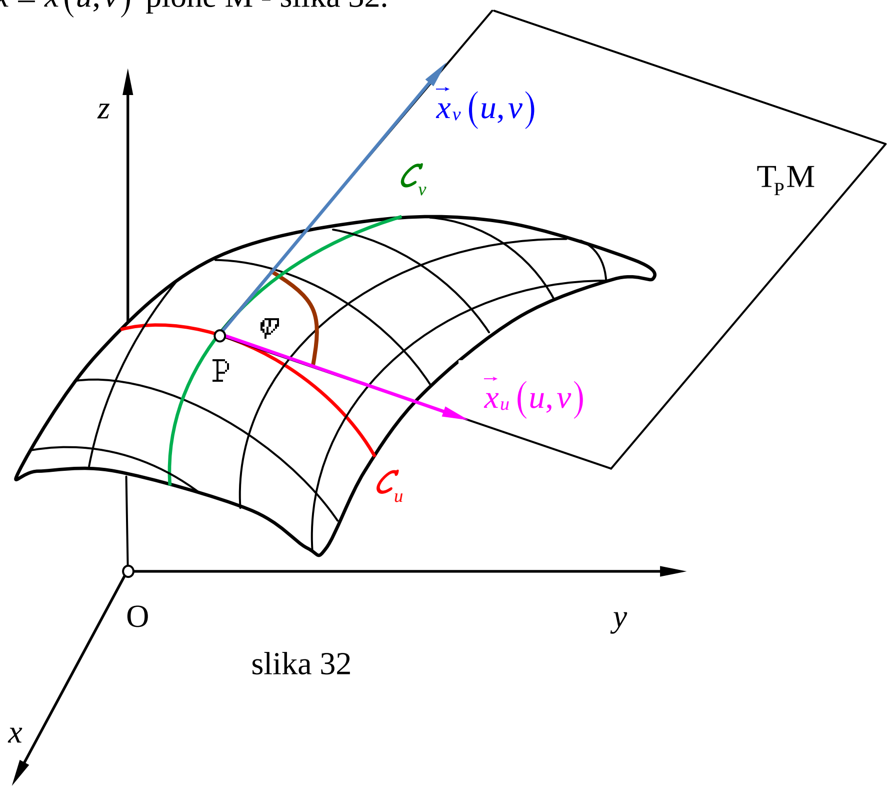
➢ Podsjetimo se, u bilo kojoj točki P regularne plohe M na prirodan način možemo konstruirati parametarsku mrežu (tj. koordinatnu mrežu), koja je sastavljena od familija u i v krivulja. Pritom u svakoj točki P vektor tangente na pripadnu u ili v krivulju je odgovarajuća parcijalna derivacija vektorske jednadžbe $\vec{x}=\vec{x}(u,v)$ plohe M - slika 32.

$\left\{\vec{x}_u(u,v),\vec{x}_v(u,v)\right\}\quad \forall\, \mathrm{P}\in \mathrm{M}$

je baza prostora $\mathrm{T_PM}$

$\varphi=\measuredangle\left(\vec{x}_u(u,v),\vec{x}_v(u,v)\right),$

gdje je $\varphi\in\langle 0,\pi\rangle$



slika 32

Primijetimo da u općem slučaju parametarska mreža nije ortogonalna mreža, ali isto tako da postoje regularne plohe (ravnina, cilindar, heliks, ...) za koje vrijedi da im je parametarska mreža ortogonalna.

Prirodno se nameću sljedeća pitanja.

(1) Koji uvjet mora vrijediti da bi parametarska mreža na regularnoj plohi M bila ortogonalna mreža?

(2) Koji uvjet mora vrijediti da u i v krivulje budu glavne krivulje zakrivljenosti?

Neka je regularna ploha M zadana vektorskom jednadžbom $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$.

(1) svaka u krivulja biti će ortogonalna na odgovarajuću v krivulju ako i samo ako je

$$\vec{x}_u(u,v)\cdot\vec{x}_v(u,v) = 0, \quad \text{odnosno} \quad \vec{x}_u(u,v)\perp\vec{x}_v(u,v) \quad \text{za svaki } (u,v)\in \mathrm{U}.$$

Nadalje, koristeći definiciju 3.3.6, zaključujemo:

$$\vec{x}_u(u,v)\perp\vec{x}_v(u,v) \quad \text{ako i samo ako je} \quad g_{12} = 0$$

za svaki $(u,v)\in \mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}^2$, gdje je U područje definicije funkcije $\vec{x}$.

(2) Primjenom definicije 3.8.1 proizlazi da će u i v krivulje biti glavne krivulje zakrivljenosti ako i samo ako su pripadni vektori tangenti tj. $\vec{x}_u(u,v)$ i $\vec{x}_v(u,v)$ ujedno glavni smjerovi. Drugim riječima, mora vrijediti:

$$S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right) = k_1(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_u(u,v), \qquad S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right) = k_2(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_v(u,v), \tag{171}$$

gdje su $k_1(\mathrm{P})$, $k_2(\mathrm{P})$ glavne zakrivljenosti, a $S_{\mathrm{P}}:\mathrm{T_PM}\to\mathrm{T_PM}$ linearan i simetričan operator. Koristeći teorem 1 (Dodatak) proizlazi da glavni smjerovi moraju biti međusobno ortogonalni, stoga uz uvjet (171) mora vrijediti:

$$\vec{x}_u(u,v)\cdot\vec{x}_v(u,v) = 0 \quad (\text{ili ekvivalentno } g_{12} = 0). \tag{172}$$

S druge strane, primjenom definicije 3.6.2 i identiteta (171) i (172) dobivamo:

$$b_{12} = S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_u(u,v)\right)\cdot\vec{x}_v(u,v) = k_1(\mathrm{P})\cdot\underbrace{\vec{x}_u(u,v)\cdot\vec{x}_v(u,v)}_{=0} = 0$$

ili ekvivalentno, primjenom svojstva simetričnosti, možemo pisati

$$b_{12} = \vec{x}_u(u,v)\cdot S_{\mathrm{P}}\left(\vec{x}_v(u,v)\right) = \vec{x}_u(u,v)\cdot k_2(\mathrm{P})\cdot\vec{x}_v(u,v) = k_2(\mathrm{P})\cdot\underbrace{\vec{x}_u(u,v)\cdot\vec{x}_v(u,v)}_{=0} = 0.$$

Time smo dobili da će u i v krivulje biti glavne krivulje zakrivljenosti ako i samo ako vrijedi da je:

$$g_{12} = 0 \quad \text{i} \quad b_{12} = 0.$$

Korolar 3.8.3

Familija u- krivulja i familija v- krivulja tvoriti će ortogonalnu mrežu glavnih krivulja zakrivljenosti na regularnoj plohi M ako i samo ako vrijedi:

$$g_{12} = 0 \quad \text{i} \quad b_{12} = 0. \tag{173}$$

Pritom se glavne zakrivljenosti $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ izračunavaju formulama:

$$k_1(\mathrm{P}) = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \qquad k_2(\mathrm{P}) = \frac{b_{22}}{g_{22}}. \tag{174}$$

Dokaz:

Dokaz identiteta (173) dan je u gore navedenim razmatranjima pod (2).

Dokažimo sada da vrijede identiteti (174) uz pretpostavku da su u i v krivulje ujedno glavne krivulje zakrivljenosti, tj. uz pretpostavku da vrijedi (173).

U ovom slučaju imamo da se simetrična matrica:

$$S_\mathrm{P} = \frac{1}{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2} \cdot \begin{bmatrix} g_{22}\,b_{11} - g_{12}\,b_{12} & g_{11}\,b_{12} - g_{12}\,b_{11} \\ g_{11}\,b_{12} - g_{12}\,b_{11} & g_{11}\,b_{22} - g_{12}\,b_{12} \end{bmatrix}$$

može pisati u obliku

$$S_\mathrm{P} = \frac{1}{g_{11}\,g_{22}} \cdot \begin{bmatrix} g_{22}\,b_{11} & 0 \\ 0 & g_{11}\,b_{22} \end{bmatrix}$$

ili

$$S_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \dfrac{b_{22}}{g_{22}} \end{bmatrix} \tag{175}$$

gdje je:

$$tr\,S_\mathrm{P} = \frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{b_{22}}{g_{22}} \quad \left(= k_1(\mathrm{P}) + k_2(\mathrm{P})\right),$$

$$\det S_\mathrm{P} = \frac{b_{11}}{g_{11}} \cdot \frac{b_{22}}{g_{22}} \quad \left(= k_1(\mathrm{P}) \cdot k_2(\mathrm{P})\right).$$

Time direktno dobivamo

$$k_1(\mathrm{P}) = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \qquad k_2(\mathrm{P}) = \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

Propozicija 3.8.4

Glavne krivulje zakrivljenosti su opća rješenja $\phi_1(u,v,c_1)=0$ i $\phi_2(u,v,c_2)=0$ pripadnih diferencijalnih jednadžbi $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1 = f_1(u,v)$ i $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2 = f_2(u,v)$.

Pritom su dane diferencijalne jednadžbe rješenja (tj. korijeni) kvadratne diferencijalne jednadžbe, tj. karakteristične jednadžbe

$$(g_{12}b_{22}-g_{22}b_{12})\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2+(g_{11}b_{22}-g_{22}b_{11})\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)+(g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11})=0\,. \tag{176}$$

Često se kvadratna diferencijalna jednadžba (176) zapisuje u obliku:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 & -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} & 1 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}=0$$

ili

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}=0 \tag{177}$$

Dokaz:

Iz definicije 3.8.1 proizlazi da je glavna krivulja zakrivljenosti ona krivulja na regularnoj plohi M ... $\vec{x}=\vec{x}(u,v)$, koja u svakoj točki plohe M ima svojstvo da je (jedinični) vektor tangente jednak (jediničnom) glavnom smjeru.

U suglasnosti sa prethodnim razmatranjima, označimo sa

$$\mathcal{C}\ \ldots\ \vec{\delta}(t)=\vec{x}(u(t),v(t))$$

glavnu krivulju zakrivljenosti na regularnoj plohi M. Tada je

$$\vec{\delta}\,'(t)=\vec{x}_u(u(t),v(t))\cdot u'(t)+\vec{x}_v(u(t),v(t))\cdot v'(t) \tag{178}$$

vektor tangente u bilo kojoj točki $\mathrm{P}=\vec{\delta}(t)$ krivulje $\mathcal{C}$, stoga je $\vec{\delta}\,'(t)\in \mathrm{T_P M}$ glavni smjer.

Označimo li sa $\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})=\frac{\vec{\delta}\,'(t)}{\left|\vec{\delta}\,'(t)\right|}$ jedinični glavni smjer (glavnog smjera $\vec{\delta}\,'(t)\in \mathrm{T_P M}$), tada dobivamo da je

$$\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})=\frac{\vec{x}_u\big(u(t),v(t)\big)\cdot u'(t)+\vec{x}_v\big(u(t),v(t)\big)\cdot v'(t)}{\sqrt{\mathrm{I}_{\mathrm{P}}\left(\vec{\delta}'(t),\vec{\delta}'(t)\right)}}.$$

Pritom smo koristili identitete (178) i (108). Nadalje, primjenom definicije prve fundamentalne forme i fundamentalnih veličina prvog reda, dobivamo:

$$\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})=\frac{\vec{x}_u\big(u(t),v(t)\big)\cdot u'(t)+\vec{x}_v\big(u(t),v(t)\big)\cdot v'(t)}{\sqrt{g_{11}\,\big(u'(t)\big)^2+2g_{12}\,u'(t)\cdot v'(t)+g_{22}\,\big(v'(t)\big)^2}}. \tag{179}$$

Uzimajući u obzir da jediničnom glavnom smjeru $\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})$ korenspondira glavna zakrivljenost $k(\mathrm{P})$ koja u točki P ima najveću ili najmanju (ekstremnu) zakrivljenost s obzirom na sve zakrivljenosti normalnih presjeka regularne plohe M (korolar 3.7.5), dobivamo da za glavnu zakrivljenost $k(\mathrm{P})$ vrijedi

$$k(\mathrm{P})=k_1(\mathrm{P}) \quad \text{ili} \quad k(\mathrm{P})=k_2(\mathrm{P})$$

i analogno će za pripadni jedinični glavni smjer $\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})$ vrijediti

$$\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})=\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P}) \quad \text{ili} \quad \vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})=\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P}).$$

Primjenom identiteta (151) direktno proizlazi da je:

$$k_1(\mathrm{P})=\mathrm{II}_{\mathrm{P}}\left(\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P}),\vec{\mathrm{e}}_1(\mathrm{P})\right), \quad k_2(\mathrm{P})=\mathrm{II}_{\mathrm{P}}\left(\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P}),\vec{\mathrm{e}}_2(\mathrm{P})\right),$$

stoga možemo pisati:

$$k(\mathrm{P})=\mathrm{II}_{\mathrm{P}}\left(\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P}),\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})\right). \tag{180}$$

Nadalje, primjenom propozicije 3.6.4 na jedinični glavni smjer $\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})$ dan identitetom (179) dobivamo:

$$\mathrm{II}_{\mathrm{P}}\left(\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P}),\vec{\mathrm{e}}(\mathrm{P})\right)=\frac{b_{11}\,\big(u'(t)\big)^2+2b_{12}\,u'(t)\cdot v'(t)+b_{22}\,\big(v'(t)\big)^2}{g_{11}\,\big(u'(t)\big)^2+2g_{12}\,u'(t)\cdot v'(t)+g_{22}\,\big(v'(t)\big)^2},$$

stoga se identitet (180) može dalje pisati u obliku:

$$k(\mathrm{P})=\frac{b_{11}\,\big(u'(t)\big)^2+2b_{12}\,u'(t)\cdot v'(t)+b_{22}\,\big(v'(t)\big)^2}{g_{11}\,\big(u'(t)\big)^2+2g_{12}\,u'(t)\cdot v'(t)+g_{22}\,\big(v'(t)\big)^2} \tag{181}$$

ili

$$k(\mathrm{P})=\frac{b_{11}\,\mathrm{d}u^2+2b_{12}\,\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}v+b_{22}\,\mathrm{d}v^2}{g_{11}\,\mathrm{d}u^2+2g_{12}\,\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}v+g_{22}\,\mathrm{d}v^2} \tag{182}$$

ako koristimo činjenicu da je: $u'(t)=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $v'(t)=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Primijetimo da se (182) može dalje zapisati u obliku:

$$k(\mathrm{P})=\frac{b_{11}+2b_{12}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+b_{22}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2}{g_{11}+2g_{12}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+g_{22}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2}\,. \tag{183}$$

Napomena:

U proizvoljnoj točki $\mathrm{P}=\vec{x}(u,v)$ regularne plohe $\mathrm{M}\ldots\ \vec{x}=\vec{x}(u,v)$ imamo da su fundamentalne veličine prvog i drugog reda zapravo skalarne funkcije od dviju varijabli koje u bilo kojoj fiksnoj točki $\mathrm{P}_0=\vec{x}(u_0,v_0)$ plohe M poprimaju neku skalarnu vrijednost. Time se fundamentalne veličine g_{ij} i b_{ij}, $i\leq j=1,2$ u kontekstu identiteta (183) mogu specijalno promatrati kao skalari, čime se jednostavnije može uočiti da je glavna zakrivljenost $k(\mathrm{P})$ zapravo skalarna funkcija u jednoj varijabli $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$.

Uvedemo li oznaku $\boxed{\nu:=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}}$,

dobivamo da je izraz (183) ekvivalentan izrazu:

$$k(\mathrm{P})=\frac{b_{11}+2b_{12}\cdot\nu+b_{22}\cdot\nu^2}{g_{11}+2g_{12}\cdot\nu+g_{22}\cdot\nu^2}\,. \tag{184}$$

Deriviranjem izraza (184), dobivamo:

$$k'(\mathrm{P})=\frac{(2b_{12}+2b_{22}\cdot\nu)\cdot(g_{11}+2g_{12}\cdot\nu+g_{22}\cdot\nu^2)-(b_{11}+2b_{12}\cdot\nu+b_{22}\cdot\nu^2)\cdot(2g_{12}+2g_{22}\cdot\nu)}{(g_{11}+2g_{12}\cdot\nu+g_{22}\cdot\nu^2)^2}$$

$$=\frac{2\cdot\left[g_{11}b_{12}\cancel{+2g_{12}b_{12}\cdot\nu}+g_{22}b_{12}\cdot\nu^2+g_{11}b_{22}\cdot\nu+2g_{12}b_{22}\cdot\nu^2\cancel{+g_{22}b_{22}\cdot\nu^3}-\right.}{(g_{11}+2g_{12}\cdot\nu+g_{22}\cdot\nu^2)^2}$$

$$\frac{\left.-g_{12}b_{11}-g_{22}b_{11}\cdot\nu\cancel{-2g_{12}b_{12}\cdot\nu}-2g_{22}b_{12}\cdot\nu^2-g_{12}b_{22}\cdot\nu^2\cancel{-g_{22}b_{22}\cdot\nu^3}\right]}{(g_{11}+2g_{12}\cdot\nu+g_{22}\cdot\nu^2)^2}$$

odnosno:

$$k'(\mathrm{P})=\frac{2\cdot\left[(g_{12}b_{22}-g_{22}b_{12})\cdot\nu^2+(g_{11}b_{22}-g_{22}b_{11})\cdot\nu+(g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11})\right]}{(g_{11}+2g_{12}\cdot\nu+g_{22}\cdot\nu^2)^2}\,.$$

Primjenom nužnog uvjeta za egzistenciju ekstrema funkcije jedne varijable, zaključujemo da skalarna funkcija $k(\mathrm{P})$ može imati ekstrem u točki P jedino ako je $k'(\mathrm{P})=0$, odnosno ako je

$$(g_{12}b_{22}-g_{22}b_{12})\cdot\nu^2+(g_{11}b_{22}-g_{22}b_{11})\cdot\nu+(g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11})=0\,. \tag{185}$$

Koristeći gore uvedenu oznaku $v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ dobivamo da je jednadžba (185) ekvivalentna sljedećoj kvadratnoj diferencijalnoj jednadžbi

$$\left(g_{12}\,b_{22} - g_{22}\,b_{12}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \left(g_{11}\,b_{22} - g_{22}\,b_{11}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right) + \left(g_{11}\,b_{12} - g_{12}\,b_{11}\right) = 0\,, \tag{186}$$

čija se rješenja $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1$, $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2$ dobivaju primjenom formule (za rješavanje kvadratne jednadžbe)

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{187}$$

gdje je:

$$a = g_{12}\,b_{22} - g_{22}\,b_{12}\,,\;\; b = g_{11}\,b_{22} - g_{22}\,b_{11}\,,\;\; c = g_{11}\,b_{12} - g_{12}\,b_{11}\,.$$

Pritom su fundamentalne veličine prvog i drugog reda (skalarne funkcije u varijablama u i v) dane sa:

$$g_{11} = \vec{x}_u\left(u,v\right)\cdot\vec{x}_u\left(u,v\right), \quad g_{12} = \vec{x}_u\left(u,v\right)\cdot\vec{x}_v\left(u,v\right), \quad g_{22} = \vec{x}_v\left(u,v\right)\cdot\vec{x}_v\left(u,v\right),$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\vec{x}_u\left(u,v\right),\vec{x}_v\left(u,v\right),\vec{x}_{uu}\left(u,v\right)\right), \quad b_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\vec{x}_u\left(u,v\right),\vec{x}_v\left(u,v\right),\vec{x}_{uv}\left(u,v\right)\right),$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\vec{x}_u\left(u,v\right),\vec{x}_v\left(u,v\right),\vec{x}_{vv}\left(u,v\right)\right).$$

Time će rješenja $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1$ i $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2$ jednadžbe (186) biti skalarne funkcije $f_i\left(u,v\right),\; i = 1,2$ u varijablama u i v, što možemo zapisati u obliku:

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1 = f_1\left(u,v\right), \tag{188}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2 = f_2\left(u,v\right). \tag{189}$$

Uočimo da su jednadžbe (188) i (189) dvije diferencijalne jednadžbe u varijablama u i v koje ćemo najčešće rješavati metodom separacije varijabli.

Uvođenjem oznake

$$\phi_1\left(u,v,c_1\right) = 0$$

za opće rješenje diferencijalne jednadžbe (188) i analogno

$$\phi_2\left(u,v,c_2\right)=0$$

za opće rješenje diferencijalne jednadžbe (189) dobivamo da su opća rješenja $\phi_1\left(u,v,c_1\right)=0$ i $\phi_2\left(u,v,c_2\right)=0$ ujedno implicitne jednadžbe pripadnih dviju familija krivulja na regularnoj plohi M. Pritom svaka krivulja (iz danih dviju familija) ima svojstvo da je jedinični vektor tangente u svakoj njenoj točki zapravo jedinični glavni smjer, stoga su $\phi_1\left(u,v,c_1\right)=0$ i $\phi_2\left(u,v,c_2\right)=0$ jednadnadžbe glavnih krivulja zakrivljenosti. Time je propozicija dokazana.

Definicija 3.8.5

Netrivijalan tangencijalni vektor $\vec{V}\in \mathrm{T_P M}$ $\left(\vec{V}\neq\vec{0}\right)$ naziva se **asimptotski smjer** ako je

$$\mathrm{II_P}\left(\vec{V},\vec{V}\right)=0\,.$$

Za neku krivulju na regularnoj plohi M kažemo da je **asimptotska krivulja** ako je u svakoj njenoj točki vektor tangente ujedno asimptotski smjer.

Komentar 3.8.6

Podsjetimo se, identitet $\boxed{\pm\chi(s)=\mathrm{II_P}\left(\vec{V},\vec{V}\right)}$ se interpretira da je zakrivljenost normalnog presjeka regularne plohe M u bilo kojoj njenoj točki P jednaka drugoj fundamentalnoj formi vektora tangente $\vec{V}\in \mathrm{T_P M}$ na normalni presjek u danoj točki P.

Pritom u točki $\mathrm{P}\in \mathrm{M}$, vektor $\vec{V}\in \mathrm{T_P M}$ zajedno sa vektorom $\vec{n}(\mathrm{P})$ razapinje ravninu π^* u kojoj leži normalni presjek regularne plohe M (vidi definiciju 3.4.6).

Primjenom definicije 3.8.5 proizlazi da je asimptotska krivulja zapravo normalni presjek plohe M (parametriziran po svom prirodnom parametru s) koji ima svojstvo da mu je zakrivljenost jednaka nuli u svakoj njegovoj točki.

Pravac je najjednostavniji primjer asimptotske krivulje.

Propozicija 3.8.7

Diferencijalna jednadžba asimptotske krivulje dana je sa:

$$b_{11}\cdot \mathrm{d}u^2+2b_{12}\cdot \mathrm{d}u\cdot \mathrm{d}v+b_{22}\cdot \mathrm{d}v^2=0\,. \tag{190}$$

Dokaz:

Pretpostavimo da je asimptotska krivulja $\mathcal{C}$ parametrizirana vektorskom jednadžbom

$$\vec{\vartheta}(s)=\vec{x}(u(s),v(s))$$

po njenom prirodnom parametru je s. Tada je $\left|\vec{\vartheta}'(s)\right|=1$, pri čemu je sa

$$\vec{\vartheta}'(s)=\vec{x}_u(u(s),v(s))\cdot u'(s)+\vec{x}_v(u(s),v(s))\cdot v'(s) \tag{191}$$

dan jedinični vektor tangente u bilo kojoj točki $\mathrm{P}=\vec{\vartheta}(s)$ asimptotske krivulje $\mathcal{C}$.

Primjenom definicije 3.8.5 proizlazi da u svakoj točki P asimptotske krivulje $\mathcal{C}$ je jedinični vektor tangente $\vec{\vartheta}'(s)\in \mathrm{T_PM}$ ujedno asimptotski smjer, što povlači da je

$$\mathrm{II_P}\left(\vec{\vartheta}'(s),\vec{\vartheta}'(s)\right)=0. \tag{192}$$

Primjenom propozicije 3.6.4 na jedinični tangencijalni vektor $\vec{\vartheta}'(s)\in \mathrm{T_PM}$ dan identitetom (191) dobivamo:

$$\mathrm{II_P}\left(\vec{\vartheta}'(s),\vec{\vartheta}'(s)\right)=b_{11}\cdot(u'(s))^2+2b_{12}\cdot u'(s)\cdot v'(s)+b_{22}\cdot(v'(s))^2,$$

stoga jednadžbu (192) možemo pisati u obliku

$$b_{11}\cdot(u'(s))^2+2b_{12}\cdot u'(s)\cdot v'(s)+b_{22}\cdot(v'(s))^2=0. \tag{193}$$

Koristeći identitete $u'(s)=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$, $v'(s)=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ dobivamo da se diferencijalna jednadžba (193) može zapisati u obliku:

$$b_{11}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+2b_{12}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+b_{22}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2=0 \quad \Big/ \cdot(\mathrm{d}s)^2$$

ili kraće:

$$b_{11}\cdot\mathrm{d}u^2+2b_{12}\cdot\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}v+b_{22}\cdot\mathrm{d}v^2=0.$$

Napomena:

Implicitna jednadžba familije asimptotskih krivulja na regularnoj plohi M dobiva se iz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe (190) asimptotske krivulje.

Primijetimo da iz Eulerove formule (165) (propozicija 3.7.4) proizlazi da je jednadžba asimptotskih krivulja dana sa:

$$k_1(\mathrm{P}) \cdot \cos^2\theta + k_2(\mathrm{P}) \cdot \sin^2\theta = 0\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi\rangle \tag{194}$$

gdje su $k_1(\mathrm{P})$ i $k_2(\mathrm{P})$ glavne zakrivljenosti u bilo kojoj točki asimptotske krivulje $\mathcal{C}$.

Definicija 3.8.8

Kažemo da je regularna ploha M **minimalna ploha** ako u svakoj njenoj točki je srednja zakrivljenost H jednaka nuli.

Kažemo da je regularna ploha M **ploha s konstantnom zakrivljenošću** ako u svakoj njenoj točki je Gaussova zakrivljenost K konstantna.

Lako se može dokazati da je sfera regularna ploha koja u svakoj svojoj točki ima konstantnu Gaussovu zakrivljenost. Time je sfera ploha s konstantnom zakrivljenošću.

Definicija 3.8.9

Kažemo da je neka fiksna točka P_0 regularne plohe M **kružna (pupčasta ili ombolička) točka** ako je $k_1(\mathrm{P}_0) = k_2(\mathrm{P}_0)$.

Pritom su $k_1(\mathrm{P}_0)$ i $k_2(\mathrm{P}_0)$ glavne zakrivljenosti u točki $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{M}$.

✐ S obzirom na korolar 3.7.5, gdje smo pokazali da vrijedi $k_1(\mathrm{P}) \le \pm\chi(s) \le k_2(\mathrm{P})$ ili $k_2(\mathrm{P}) \le \pm\chi(s) \le k_1(\mathrm{P})$ (pri čemu je $\chi(s)$ zakrivljenost normalnih presjeka) proizlazi da za kružne točke P_0 na plohi M vrijedi:

$$\chi(s) = k(\mathrm{P}_0)\,,$$

gdje je $k(\mathrm{P}_0) = k_1(\mathrm{P}_0) = k_2(\mathrm{P}_0)$.

Specijalno, ako je $k(\mathrm{P}_0) = 0$, onda točku P_0 nazivamo **točkom spljoštenosti** regularne plohe M.

✐ U točki spljoštenosti je zakrivljenost normalnog presjeka jednaka nuli.

Nadalje, iz $\chi(s) = \mathrm{II}_{\mathrm{P}}(\vec{V}, \vec{V}) = 0$ proizlazi da je tangencijalni vektor $\vec{V} \in \mathrm{T}_{\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$ u točki spljoštenosti P_0 asimptotski smjer.

Dakle, u svakoj točki spljoštenosti (regularne plohe M) je vektor tangente ujedno asimptotski smjer.

Definicija 3.8.10

✐ Kažemo da je P_0 **parabolička točka** regularne plohe M ako je Gaussova zakrivljenost K u toj točki jednaka nuli, pri čemu točka P_0 nije točka spljoštenosti.

Drugim riječima, točka P_0 je parabolička točka ako je $k_1(\mathrm{P}_0)\cdot k_2(\mathrm{P}_0)=0$, pri čemu glavne zakrivljenosti $k_1(\mathrm{P}_0)$ i $k_2(\mathrm{P}_0)$ nisu istovremeno jednake nuli.

- ✐ Kažemo da je P_0 **eliptička točka** regularne plohe M ako je Gaussova zakrivljenost u toj točki strogo pozitivna, tj. ako su glavne zakrivljenosti $k_1(\mathrm{P}_0)$ i $k_2(\mathrm{P}_0)$ istog predznaka.

- ✐ Kažemo da je P_0 **hiperbolička točka** regularne plohe M ako je Gaussova zakrivljenost u toj točki strogo negativna, tj. ako su glavne zakrivljenosti $k_1(\mathrm{P}_0)$ i $k_2(\mathrm{P}_0)$ suprotnog predznaka.