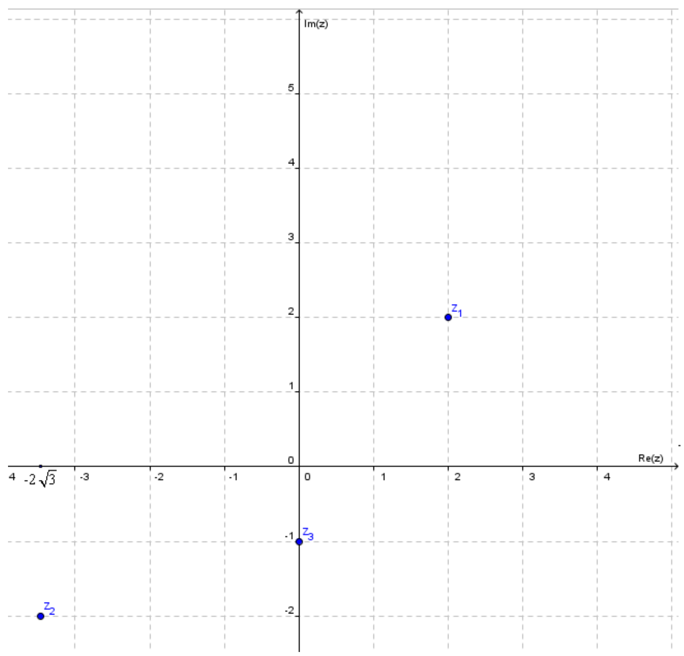
KOMPLEKSNA ANALIZA

1.zadaća, 2012./2013.

1. Dani su sljedeći kompleksni brojevi:



Napišite z_1, z_2 i z_3 u trigonometrijskom obliku i odredite kompleksne brojeve z takve da je

$$z^{15} = \frac{z_1^{12} - z_2^4}{z_3^4}$$

takve da je $\frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$.

2. (a) Odredite modul i argument kompleksnog broja

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}.$$

Kakav mora biti n da bi z^n bio realan broj?

(b) Odredite kompleksne brojeve z takve da je

$$e^z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$$

.

3. Prikažite kompleksan broj

$$\frac{\sqrt{3}-i}{i(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6})}$$

u trigonometrijskom obliku.

4. Pokažite da vrijedi

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=\begin{cases}2, & \text{ako je } n=3k\\ -1, & \text{ako je } n=3k+1.\end{cases}$$

5. Prikažite u algebarskom ili trigonometrijskom obliku funkcije:

   (a) $w=\frac{z-1}{z+1}$,

   (b) $w=e^z$.

6. Odredite i skicirajte podskup kompleksne ravnine određen sa:

$$|z|=\mathrm{Im}z+1.$$

7. Riješite jednadžbu:

$$\sin z=\pi i.$$

8. Dokažite da je

$$\mathrm{Arch}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

9. Izračunajte

$$(4-3i)^{1+i}.$$

10. Izračunajte $w(z_0)$ ako je

$$w=\frac{\overline{z}}{z},\quad z_0=1+i.$$

11. Dokazati da je skup $F\subseteq\mathbb{C}$ zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova.

12. Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\mathrm{Re}(z^4)-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(z^4)=(\mathrm{Re}(z^2))^2,\quad \mathrm{Im}(\mathrm{z}^2)=2\sqrt{2}.$$