

# KOMPLEKSNA ANALIZA

2.zadaća, 2012./2013.

**Zadatak 1.** Odredite integral

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz,$$

gdje je  $C$ :

- (a) segment od  $-1$  do  $i$ ,
- (b) luk jediničnog kruga  $\text{Im}z \geq 0$  od  $-1$  do  $i$ .

Podudaraju li se ova dva rezultata (obrazložite)?

**Zadatak 2.** Odredite integral

$$\int_C |z|^2 dz,$$

gdje je  $C$

- (a) segment od  $-1$  do  $i$ ,
- (b) luk jediničnog kruga  $\text{Im}z \geq 0$  od  $-1$  do  $i$ .

Podudaraju li se ova dva rezultata (obrazložite)?

**Zadatak 3.** Izračunajte:

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz.$$

**Zadatak 4.** Izračunajte:

$$\int_C \frac{z^3 + \sin z}{(z-i)^3} dz,$$

gdje je  $C$  rub kvadrata s vrhovima  $\pm 2 \pm 2i$  (suprotno od kazaljke na satu).

**Zadatak 5.** Izračunajte:

$$\int_C \frac{\operatorname{tg} z}{z} dz,$$

gdje je  $C$  rub trokuta s vrhovima  $0$  i  $\pm 1 + 2i$ .

**Zadatak 6.** Razvijte u Taylorov red oko točke  $0$  funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^2}.$$

**Zadatak 7.** Razvijte u Taylorov red oko točke  $0$  funkciju

$$f(z) = \cos^2 z.$$

**Zadatak 8.** Razvijte u Taylorov red oko točke  $1$  funkciju

$$f(z) = \sin(z + 3).$$

**Zadatak 9.** Razvijte u Taylorov red oko točke  $-1$  funkciju

$$f(z) = \ln(5 - z).$$

**Zadatak 10.** Razvijte u Taylorov red oko točke  $\frac{\pi}{4}$  funkciju

$$f(z) = \cos z.$$

**Zadatak 11.** Odredite reziduume u singularitetima funkcije:

$$f(z) = ze^{\frac{1}{z}} \sin z.$$

**Zadatak 12.** Razvijte u Taylorov red funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(1 - 4z)^3}.$$

**Zadatak 13.** Odredite reziduume u singularitetima funkcije:

$$f(z) = (z^2 + z + 1) \cos\left(\frac{1}{2z - 1}\right).$$

**Zadatak 14.** Odredite reziduume u singularitetima funkcije:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}} \cdot \frac{1}{z-3}.$$

**Zadatak 15.** Izračunajte integral:

$$\int_C \frac{\sin(z-1)}{z^2(z-1)^3} dz, \quad C \dots |z-1-i| = 2$$

**Zadatak 16.** Odredite reziduume u singularitetima funkcije:

$$\int_C \frac{e^{z^2} \cos z}{(z-1)^3} + z^2 e^{\frac{2}{z-2}} dz, \quad C \dots |z-3| = \frac{3}{2}.$$

**Zadatak 17.** Odredite reziduume u singularitetima funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{3z} - 1}{z^3}.$$

**Zadatak 18.** Odredite reziduume u singularitetima funkcije:

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{1}{z-2}\right).$$

**Zadatak 19.** Odredite reziduume u singularitetima funkcije:

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}.$$

**Zadatak 20.** Odredite reziduume u singularitetima funkcije:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)}.$$

**Zadatak 21.** Izračunajte krivuljni integral

$$\int_{\Gamma} (z^2 + z\bar{z}) dz$$

gdje je  $\Gamma$  luk jedinične kružnice  $|z| = 1$  tako da je  $0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}$

**Zadatak 22.** Izračunajte krivuljni integral:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz.$$

**Zadatak 23.** Izračunajte krivuljni integral:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz.$$

**Zadatak 24.** Razvijte u Laurentov red oko točke 0 funkciju

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3}.$$

**Zadatak 25.** Razvijte u Laurentov red oko točke 0 funkciju

$$f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z^2}.$$

**Zadatak 26.** Razvijte u Laurentov red oko točke 0 funkciju

$$f(z) = \frac{1 - \cos z^2}{z^5}.$$

**Zadatak 27.** Razvijte u Laurentov red oko točke 0 funkciju

$$f(z) = \frac{1 + \cos z}{z^4}.$$

**Zadatak 28.** Razvijte u Laurentov red oko točke 0 funkciju

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)}.$$

**Zadatak 29.** Razvijte u Laurentov red oko točke 0 funkciju

$$f(z) = \frac{\sin z}{1-z}.$$

**Zadatak 30.** Odredite glavni dio Laurentovog reda u okolini toke 0 za funkciju

$$f(z) = \frac{z-1}{\sin^2 z}.$$

**Zadatak 31.** Ispitajte singularitete i njihov karakter za funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2 - 2 \cos z}.$$

**Zadatak 32.** Ispitajte singularitete i njihov karakter za funkciju

$$f(z) = \frac{z}{z - 1 + e^{-z}}.$$

**Zadatak 32.** Ispitajte singularitete i njihov karakter za funkciju

$$f(z) = \frac{z}{e^{z^2} - 1}.$$

**Zadatak 33.** Razvijte u Laurentov red oko 0 funkciju

$$f(z) = \frac{z^2 + z - 2}{(z^2 + 1)(z - 3)}$$

na područjima:

- (a)  $|z| < 1$ ,
- (b)  $1 < |z| < 3$ ,
- (c)  $|z| > 3$ .