

KOMPLEKSNA ANALIZA

1.zadaća, 2013./2014.

Zadatak 1. Prikažite u trigonometrijskom obliku:

(a) $(1 - i)(\sqrt{3} + i)^3$

(b) $\frac{(\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4})^8}{\frac{i}{2} - \frac{1}{2}}$

(c) $\frac{-ie^{-3}}{(e^3 - ie^3)^3}$

Zadatak 2. Skicirajte u Gaussovoj ravnini:

1. $\frac{4}{z - 1} = \bar{z} - 1$

2. $|z| = \operatorname{Re} z + 1$

3. $|z - z_1| = |z - z_2|$, gdje su z_1, z_2 zadani kompleksni brojevi

Zadatak 3. Odredite $\operatorname{Arg} z$, ako je:

(a) $z = \frac{i}{-2 - 2i}$

(b) $(\sqrt{3} - i)^6$

Zadatak 4. Pomoću De Moivreove formule pokažite da vrijedi:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta.$$

Čemu je jednak $\sin 3\theta$?

Zadatak 5. Napišite

$$f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$$

kao funkciju od z . Je li f diferencijabilna?

Zadatak 6. Pokažite: ako su $f = u + iv$ i $\bar{f} = u - iv$ analitičke, onda je f konstanta.

Zadatak 7. Odredite analitičku funkciju čiji je imaginarni dio

$$v(x, y) = 2xy + y.$$

Zadatak 8. Provjerite je li funkcija

$$u(x, y) = (e^y - e^{-y}) \cos x + (e^y + e^{-y}) \sin x$$

harmonijska. Nađite analitičku funkciju f čiji je u realni dio ako još vrijedi $f(0) = 2$.

Zadatak 9. Odredite

$$\left(\frac{e}{2}(-1 - \sqrt{3}i)\right)^{3\pi i}.$$

Zadatak 10. Pokažite da vrijedi

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Zadatak 11. Riješite jednačbe:

(a) $\sin z = \operatorname{ch} 4$

(b) $\overline{e^{iz}} = e^{i\bar{z}}$

(c) $\sqrt{z} = 1 + i$

Zadatak 12. Odredite sliku područja

$$D = \{z = (x, y) : \frac{\pi}{5} < x < \frac{4\pi}{5}, \ln 3 < y < \ln 5\}$$

pri preslikavanju funkcijom

$$f(z) = e^{-i(z - \frac{\pi}{2})}.$$

Zadatak 13. Odredite sliku područja

$$D = \{z = (x, y) : x > 0, y > 0\}$$

pri preslikavanju funkcijom

$$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

Zadatak 14. U kojim je točkama funkcija

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

diferencijabilna? Odredite $f'(z)$.

Zadatak 15. Riješite jednađbu

$$\sin z - \cos z = 4$$